

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Unter Mitarbeit von

H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner
E. Kramar, A. Mehliß, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann
M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, R. Theile, F. Tank, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von

KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung:

J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma

Geschäftsführende Redaktion:

F. Rühmann

BAND 15

FEBRUAR 1961

HEFT 2

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

KWR

KABELWERK RHEYDT AKT.-GES.

RHEYDT (RHLD.)

INHALT

Originalmittellungen:

	Seite
Elektromagnetische Wellen in Verzweigungen von Rechteckhohlleitern	61
von <i>H. Kaden</i>	
Theorie nichtreziproker Schaltungen mit gleicher Eingangs- und Ausgangsfrequenz unter Verwendung nichtlinearer Halbleiterelemente	71
von <i>R. Maurer</i> und <i>K.-H. Löcherer</i>	
Zur Dimensionierung <i>n</i> -stufiger Leitungstransformatoren	84
von <i>H. Schreiber</i>	
Vorausbestimmung von Signalen mit Hilfe eines einfachen RC-Netzwerkes	91
von <i>A. Schief</i>	
Sechs „natürliche“ Normierungen der Stammgleichung dritten Grades	94
von <i>E. Schwartz</i>	
Beitrag zur Theorie der minimalen Rauschzahl von rauscharmen Wanderfeldröhren	101
von <i>K.-B. Niclas</i>	
Buchbesprechungen	100
Persönliches	107
Berichtigung	108

ARCHIV DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG

Schriftleitung:

Dr. phil. J. Piesch,
Wien IV/50, Karlsplatz 13, Fernruf U 46530

Dr.-Ing. J. Schunack,
Berlin-Lichterfelde 1, Drakestraße 1a, Fernruf 732261

Prof. Dr.-Ing. E. h. Dr. techn. M. Strutt,
Zürich 7, Gloriastraße 35, Fernruf 327330

Oberstudiendirektor Dr. phil. A. Thoma,
Fulda, Heinrich-von-Bibra-Platz 1,
Fernruf (vorm.) 2962, (nachm.) 4428

Geschäftsführende Redaktion und Anzeigenverwaltung:

Ing. Friedrich Rühmann
(17a) Karlsruhe-Durlach, Machstraße 4, Fernruf 42854

Alle Zuschriften werden entweder an die Schriftleitung oder an die Geschäftsführende Redaktion erbeten.

Geschäftliche Hinweise:

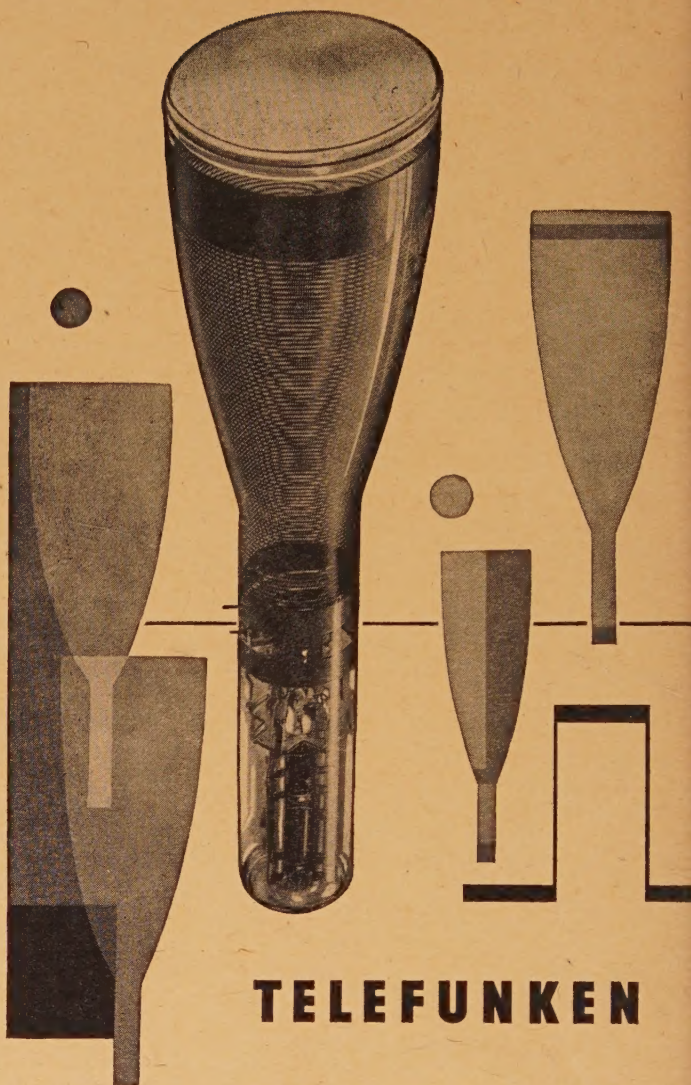
Der Bezug des Archivs der elektrischen Übertragung durch Verlag, Post und Buchhandel ist im Abonnement zum Preis von DM 20,— für das Vierteljahr möglich. Einzelhefte können zum Preis von DM 7,— geliefert werden.

Anzeigenaufträge und -anfragen bitten wir an die Anzeigenverwaltung der Zeitschrift zu richten.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

Postscheckkonto Stuttgart 64383

DG 10-18, eine Elektronenstrahlröhre mit extrem hoher Ablenkempfindlichkeit (Ablenkfaktor 3,7 V/cm) und sehr großer Meßgenauigkeit (Linearitätsabweichung max. 0,5%).



TELEFUNKEN

TELEFUNKEN-Elektronenstrahlröhren für Oszillographen sind Erzeugnisse langjähriger Forschung und Entwicklung. Sie vereinigen große Linienschärfe und enge Toleranzen mit großer Leuchtdichte und Ablenkempfindlichkeit und werden von Jahr zu Jahr in steigendem Maße verwendet. Entwicklungsstellen der Industrie erhalten auf Anforderung Druckschriften mit genauen technischen Angaben.



TELEFUNKEN
RÖHREN-VERTRIEB
ULM-DONAU

ARCHIV

DER ELEKTRISCHEN ÜBERTRAGUNG (A.E.Ü.)

Unter Mitarbeit von H. Busch, R. Feldtkeller, E. Hölzler, K. Hoffmann, O. Kirchner, E. Kramar, A. Mehliß, W. Nestel, H. Piloty, L. Pungs, F. Schröter, W. O. Schumann, M. Seddig, A. Siemens, R. Tamm, F. Tank, R. Theile, R. Vieweg, G. Wuckel

Begründet von KARL WILLY WAGNER

Schriftleitung: J. Piesch, J. Schunack, M. Strutt, A. Thoma / Geschäftsführende Redaktion: F. Rühmann
S. HIRZEL VERLAG, Stuttgart

Band 15

Februar 1961

Heft 2

Elektromagnetische Wellen in Verzweigungen von Rechteckhohlleitern

VON HEINRICH KADEN

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG, München

(A.E.Ü. 15 [1961], 61—70; eingegangen am 23. November 1960)

DK 621.372.832:621.372.822

Es werden zunächst zwei parallele Hohlleiter betrachtet, deren Zwischenwand an einer bestimmten Stelle aufhört. Fällt nun in einem der beiden Hohlleiter eine H_{01} -Welle ein, so wird ihre Leistung in folgender Weise zerstreut: Ein Teil von ihr wird in den primären Hohlleiter reflektiert; ein anderer Teil wird um die Kante gebeugt und fließt in dem benachbarten Leiter zurück. Der dritte Teil setzt sich als fortschreitende Welle in dem gemeinsamen Hohlleiter doppelter Breite fort. Dieses Problem läßt sich mathematisch durch ein unendliches, lineares Gleichungssystem formulieren, durch das die wechselseitige Einwirkung unendlich vieler Wellentypen zum Ausdruck kommt. Das Gleichungssystem wird mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine approximativ gelöst, wobei 50 simultane Gleichungen verarbeitet werden müssen. Das komplementäre Problem, bei dem eine Welle in den breiten Wellenleiter einfällt und sich auf zwei parallele Hohlleiter der halben Breite verzweigt, wird nach der gleichen Methode behandelt. Die Ergebnisse dieser beiden Aufgaben werden dazu benutzt, um die Kopplung zwischen zwei parallelen Rechteckhohlleitern zu berechnen, die durch einen Schlitz in der Zwischenwand von beliebiger Länge l gekoppelt sind. — Im Hinblick auf die Verwendung in Frequenzweichen wird auf den Fall eingegangen, daß sich die Leistung zu gleichen Teilen auf die beiden abgehenden Leitungen aufteilt.

The paper discusses initially two parallel waveguides whose partition wall is discontinued from a certain point onward. If now an H_{01} -mode enters one of the two waveguides, its power is scattered in the following way: one part is reflected into the primary waveguide, a second part is diffracted around the edge and returns along the adjacent waveguide, and the third part continues as propagating mode in the common waveguide of double width. This problem can be formulated mathematically by an infinite set of linear equations which expresses the mutual interaction of an infinite number of mode types. This set of equations is approximatively solved with an electronic computer. The complementary problem, where a mode enters a wide waveguide and is split into two parallel waveguides of half the width, is discussed by the same method. The results of these two problems are used for calculating the coupling between two parallel rectangular waveguides which are coupled by a slot in the partition wall of an arbitrary length l . — With a view to the application in frequency separating and combining filters the paper discusses the case that the power divides evenly to the two outgoing waveguide sections.

1. Einleitung

Bei zahlreichen Aufgaben der Mikrowellentechnik spielen die Verzweigungen von Hohlleitern eine Rolle. In diesem Zusammenhang sei an die Richtungskoppler, magischen T's, Frequenzweichen, Zirkulatoren usw. erinnert. Die Wellenausbreitung in solchen Anordnungen läßt sich zwar qualitativ durchaus übersehen, jedoch war es bisher nicht möglich, die sich dabei abspielenden Vorgänge exakt vorauszuberechnen. Dies liegt daran, daß man bei komplizierteren Aufgaben der Wellenausbreitung in vielen Fällen auf ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten stößt, das lösen zu wollen, bisher als aussichtslos galt. Solche Gleichungssysteme treten immer dann auf, wenn unendlich viele Eigenwellen oder Wellentypen miteinander in Wechselwirkung treten. Nun ist aber in neuerer Zeit dem Theoretiker

ein Rüstzeug in die Hand gegeben worden, mit dessen Hilfe es möglich geworden ist, Probleme mathematisch anzupacken, die bisher als praktisch unlösbar angesehen wurden. Wir meinen die elektronischen Rechenmaschinen. Zwar läßt sich ein unendliches Gleichungssystem auch mit einer solchen Maschine nicht mathematisch exakt lösen. Man kann aber der exakten Lösung beliebig nahe kommen, wenn man ein System von beliebig, aber endlich vielen Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten aus dem unendlichen System herauslöst. Dabei möge die Konvergenz solcher Systeme hier unerörtert bleiben, die bei den physikalisch „vernünftigen“ Problemen ohnehin als gewährleistet anzusehen ist.

Es soll im folgenden gezeigt werden, wie man mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine die Lösung einer konkreten technischen Aufgabe er-

reichen kann, für die bisher nur grobe Näherungen bekannt waren¹. Als solche Aufgabe haben wir die Ausbreitung von Wellen in einer Verzweigung von Rechteckhohlleitern gewählt, die in der Literatur bereits an verschiedenen Stellen erwähnt worden sind [1], [2], [4]. Wir gehen im folgenden von dem Übergang von zwei parallelen Hohlleitern in einen doppelt so breiten Hohlleiter aus. Dann wird der komplementäre Fall behandelt, bei dem die Wellen von einem breiten Hohlleiter in zwei parallele Hohlleiter mit der halben Breite übertreten. Die Ergebnisse dieser beiden Kapitel werden dann dazu verwendet, um die Kopplung zwischen zwei parallelen Hohlleitern zu ermitteln, deren Zwischenwand in einer beliebigen Länge unterbrochen ist.

2. Übergang von zwei parallelen in einen breiten Hohlleiter

Wir betrachten nach Bild 1 zwei gleiche parallele rechteckige Hohlleiter mit dem Querschnitt $a \cdot b$ (a lange und b kurze Seite), die durch eine Zwischenwand der Höhe b getrennt sind. Beide Hohlleiter werden gleichzeitig mit einer H_{10} -Welle gleicher

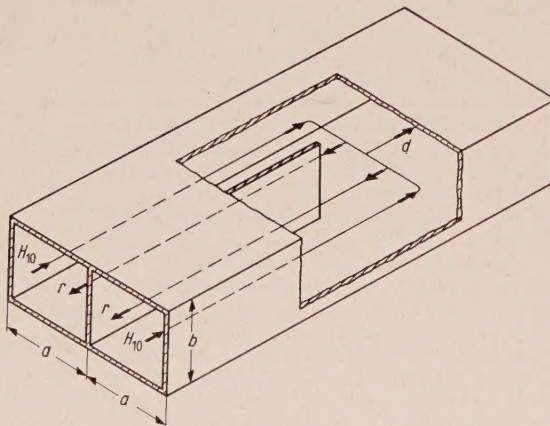


Bild 1. Übergang von zwei parallelen Hohlleitern in einen breiten Hohlleiter; r reflektierte Wellen, d durchgehende Wellen.

Phase beaufschlagt. An der Stelle $z = 0$ (z Ausbreitungsrichtung) hört die Zwischenwand auf; für $z > 0$ setzen sich die beiden Hohlleiter in einen homogenen Hohlleiter der doppelten Breite $2a$ fort. Der Querschnitt bei $z = 0$ ist also eine Stoßstelle, an der ein Teil der einfallenden Leistung reflektiert wird und ein Teil durchgeht. Dabei entstehen gleichzeitig Felder beliebig hoher Ordnung, die teilweise als Wellen existenzfähig und von einer bestimmten Ordnungszahl ab statisch gedämpft sind; man bezeichnet diese auch als Dämpfungstypen. Die Metallwände nehmen wir als unendlich gut leitend an, so daß wir von Verlustleistungen absehen können. Die Wandstärke vernachlässigen wir. Wir stellen uns zur Aufgabe, eine exakte Lösung dieses Problems zu finden.

¹ Als Rechenmaschine wurde die Siemens-Datenverarbeitungsanlage 2002 benutzt.

In Bild 2 ist diese Situation schematisch dargestellt, wobei auch das verwendete Koordinatensystem x, y, z definiert ist. Vor der Stoßstelle ($z < 0$) haben wir folgenden Lösungsansatz:

$$E_y = E_0 f_2(x) e^{-j\beta_z z} + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} E_{rm} f_m(x) e^{j\beta_m z}, \quad (1a)$$

$$H_x = -\frac{E_0}{Z_2} f_2(x) e^{-j\beta_z z} + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{E_{rm}}{Z_m} f_m(x) e^{j\beta_m z}. \quad (1b)$$

Hierin haben die Funktionen $f_m(x)$ die Bedeutung

$$f_m(x) = \begin{cases} \sin \frac{m\pi x}{2a} & \text{für } 0 < x < a, \\ -\sin \frac{m\pi x}{2a} & \text{für } a < x < 2a. \end{cases} \quad (2)$$

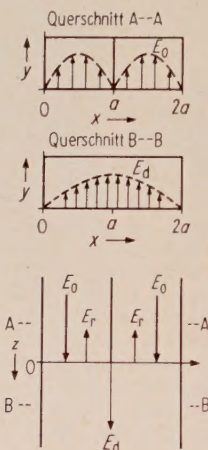


Bild 2. Schema von zwei parallelen Rechteckhohlleitern, die sich für $z > 0$ in einem einzigen Hohlleiter doppelter Breite fortsetzen.

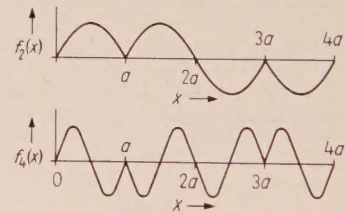


Bild 3. Die Funktionen $f_2(x)$ und $f_4(x)$ in dem Lösungsansatz Gl. (1) für $z < 0$.

Sie sind in Bild 3 für $m = 2$ und 4 mit ihren analytischen Fortsetzungen über $x = 2a$ hinaus veranschaulicht. Der Ansatz Gl. (1) befriedigt die Maxwell'schen Gleichungen und ist symmetrisch für die beiden Hohlleiter. Auch die vorgeschriebenen Randbedingungen werden erfüllt, denn es ist $E_y = H_x = 0$ für $x = 0, a$ und $2a$. Der erste Term mit dem Faktor E_0 ist die einfallende H_{10} -Welle, während der zweite Term mit den noch unbekannten Faktoren E_{rm} die unendliche Summe aller reflektierten Wellen ausdrückt. (E sind die Maximalwerte der elektrischen Feldstärke im Querschnitt für den jeweiligen Wellentyp.) Die Größen β_m und Z_m bedeuten die Phasenkonstanten und den Wellenwiderstand

der verschiedenen Wellen vom Typ $H_{\frac{m}{2}0}$:

$$\beta_m = \sqrt{\beta_0^2 - \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2} = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{m}{2} \frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}, \quad (3)$$

$$Z_m = \frac{\omega \mu_0}{\beta_m} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{2} \frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \quad (4)$$

($\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi/\lambda_0$ Phasenmaß des leeren Raumes, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ Wellenwiderstand des leeren Raumes).

Der Lösungsansatz für H_{n0} -Wellen in dem breiten Hohlleiter nach der Stoßstelle enthält an Stelle der Funktionen $f_m(x)$ die Funktionen $\sin n\pi x/2a$, die aus Symmetriegründen nur ungeradzahlige Indizes $n = 1, 3, 5, \dots$ enthalten. Daher ist für $z > 0$

$$E_y = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} E_{dn} \sin \frac{n\pi x}{2a} e^{-j\beta_n z} \quad (5a)$$

$$H_x = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{E_{dn}}{Z_n} \sin \frac{n\pi x}{2a} e^{-j\beta_n z} \quad (5b)$$

Dieser Ansatz erfüllt ebenfalls die Maxwellschen Gleichungen und die Randbedingungen $E_y = H_x = 0$ für $x = 0$ und $2a$.

Die Phasenkonstanten β_n und Wellenwiderstände Z_n berechnen sich ebenfalls nach Gl. (3) und (4), wenn an Stelle von m jetzt n genommen wird. Die sin-Funktionen sind für die Indizes $n = 1$ und 3 in Bild 4 dargestellt. Die Größen E_{dn} bedeuten die Maximalwerte der Feldstärken der durchgehenden Wellentypen.

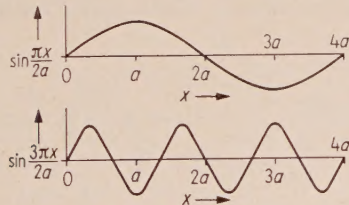


Bild 4. Die Funktionen $\sin \pi x/2a$ und $\sin 3\pi x/2a$ in dem Lösungsansatz Gl. (5) für $z > 0$.

Die unendlich vielen noch unbekannten Feldstärken E_{rm} und E_{dn} bestimmen sich aus den Übergangsbedingungen, nach denen die tangentiellen Komponenten der elektrischen Feldstärke (E_y) und der magnetischen Feldstärke (H_x) an der Stoßstelle (d. h. für $z = 0$) stetig sein müssen, und zwar für den gesamten Querschnitt $0 < x < 2a$. Um dies zu erreichen, müssen wir die Funktionen $f_m(x)$ nach Gl. (2) als Fourierreihen nach den Funktionen $\sin n\pi x/2a$ entwickeln. Dies ergibt den Ausdruck

$$f_m(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m(-1)^{(1+m+n)/2}}{m^2 - n^2} \sin \frac{n\pi x}{2a}. \quad (6)$$

Führt man diese Beziehung in Gl. (1) ein, so lassen sich jetzt die Übergangsbedingungen ansetzen. Man erhält aus der Forderung, daß E_y stetig

bei $z = 0$ sein soll, durch Gleichsetzen der Gl. (1a) und (5a) das unendliche Gleichungssystem

$$-\frac{1}{4-n^2} + \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{r_m}{m^2-n^2} = \frac{d_n}{2} \quad (7)$$

für $n = 1, 3, 5, \dots$

Ein zweites System ergibt sich aus der Stetigkeitsforderung für H_x bei $z = 0$, indem man die Gl. (1b) und (5b) gleichsetzt,

$$\frac{1}{4-n^2} + \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{Z_2}{Z_m} \frac{r_m}{m^2-n^2} = -\frac{Z_2}{Z_n} \frac{d_n}{2} \quad (8)$$

für $n = 1, 3, 5, \dots$

Hierbei sind normierte Reflexionskoeffizienten r_m und Durchlaßkoeffizienten d_n eingeführt worden, die nach den Beziehungen

$$\frac{(-1)^{m/2} m E_{rm}}{2 E_0} = r_m, \quad \frac{\pi}{4} (-1)^{(1+n)/2} \frac{E_{dn}}{E_0} = d_n \quad (9)$$

definiert sind.

Aus den Gleichungssystemen (7) und (8) kann man nun ohne Mühe alle Koeffizienten d_n eliminieren und erhält so ein einziges unendliches System linearer Gleichungen für die Reflexionskoeffizienten r_m . Es lautet

$$\sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{Z_n}{Z_m}\right) r_m}{m^2 - n^2} = \frac{\left(1 - \frac{Z_n}{Z_2}\right)}{4 - n^2} \quad (10)$$

für $n = 1, 3, 5, \dots$

Hierbei ist zu beachten, daß die Wurzeln in Z_n bzw. Z_m entsprechend Gl. (4) positiv reell zu nehmen sind, wenn der Radikand positiv ist (Wellentypen). Bei wachsendem Index n oder m werden jedoch die Radikanden von einer gewissen Stelle ab negativ. Physikalisch bedeutet dies, daß die betreffenden Wellen als solche nicht mehr existieren, sondern statisch gedämpft sind (Dämpfungstypen). Für diese Fälle muß die Wurzel negativ imaginär genommen werden.

Das unendliche Gleichungssystem (10) läßt sich nur approximativ lösen, indem man aus ihm ein endliches System der ersten N Gleichungen mit N Unbekannten r_m herauslöst. Die Zahl N kann beliebig groß sein; je größer N ist, um so genauer wird die Lösung sein. Da r_m komplex ist, setzen wir

$$r_m = |r_m| e^{j\varphi_m}; \quad (11)$$

dann entsteht aus N komplexen Gleichungen ein System von $2N$ reellen Gleichungen mit $2N$ reellen Unbekannten. Da die Konvergenz mit wachsendem N schwach ist, brauchen wir etwa $N = 25$ Gleichungen, d. h., es müssen Systeme mit je 50 linearen Gleichungen für 50 Unbekannte gelöst werden, was nur mit elektronischen Rechenmaschinen durchführbar ist². Um einen Begriff von der Konvergenz des Verfahrens zu vermitteln, sind in Bild 5 die Werte von r_2 und r_4 in Abhängigkeit von der Zahl N

² Siehe Fußnote 1. Sämtliche Rechnungen auf der elektronischen Rechenmaschine wurden von Herrn K. WALLNER ausgeführt.

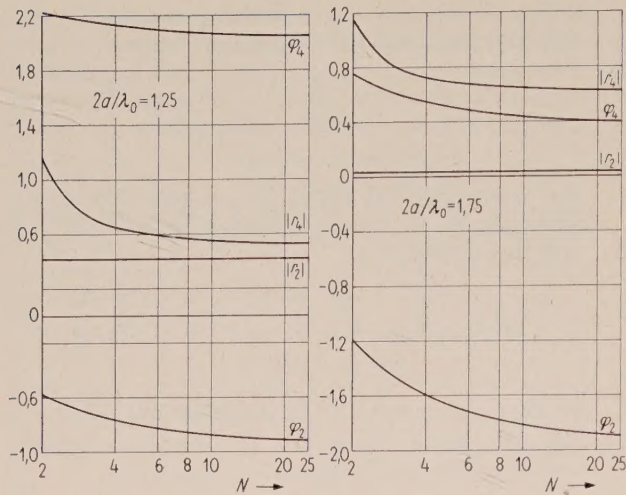


Bild 5. Die Reflexionsfaktoren r_2 und r_4 als Lösung des Gleichungssystems (10) in Abhängigkeit von der Anzahl N der berücksichtigten Gleichungen; N Anzahl der komplexen Gleichungen.

der komplexen Gleichungen im logarithmischen Maßstab aufgetragen, und zwar für die beiden normierten Frequenzen von $2a/\lambda_0 = 1,25$ und $2a/\lambda_0 = 1,75$. Im ersten Fall existieren als Wellen nur die Grundwellen, d. h. die Wellen mit den Indizes $m = 2$ und $n = 1$. Man erkennt, daß der Betrag $|r_2|$ des Reflexionsfaktors r_2 der Grundwelle sich mit der Zahl der Gleichungen nicht ändert [3]. Dagegen ist der Winkel φ_2 , der im 4. Quadranten liegt, vor allem für kleine N stark von N abhängig. Der Wert $\varphi_2 = -0,92$ für $N = 25$ dürfte mit praktischer Genauigkeit der Endwert sein, da die Kurve schon fast horizontal verläuft. Auch der asymptotische Endwert für r_4 dürfte mit $N = 25$ Gleichungen erreicht sein. Geht man zu der höheren Frequenz $2a/\lambda_0 = 1,75$ über, bei der neben der H_{10} - auch die H_{30} -Welle im breiten Hohlleiter existiert, so wird die Konvergenz vor allem für den Phasenwinkel φ_2 von r_2 schwächer, wie aus Bild 5 ersichtlich ist. Jedoch ist der Wert von φ_2 für $N = 25$ auch hier mit praktischer ausreichender Genauigkeit als Endwert anzusehen.

In den Bildern 6 und 7 sind die Ergebnisse der Rechnung wiedergegeben, wobei auf der Abszisse die normierte Frequenz $2a/\lambda_0$ verwendet ist. Der Betrag $|r_m|$ des Reflexionsfaktors und der Phasenwinkel φ_m sind in Bild 6 dargestellt, und zwar für die vier ersten Wellentypen ($m = 2, 4, 6$ und 8) in dem Intervall von $1 \leq 2a/\lambda_0 \leq 2,5$. Wie man sieht, kann man hierbei drei Teilintervalle unterscheiden. In dem ersten Teilintervall $1 < 2a/\lambda_0 < 1,5$ ist in dem ankommenden und abgehenden Hohlleiter nur jeweils die Grundwelle (H_{10}) existenzfähig ($m = 2, n = 1$). Für das anschließende Intervall $1,5 < 2a/\lambda_0 < 2,0$ wird dann in dem abgehenden Hohlleiter zusätzlich die H_{30} -Welle existent ($n = 3$). Bei weiterer Steigerung der Frequenz in das Intervall $2,0 < 2a/\lambda_0 < 2,5$ kommt dann in dem ankommenden Hohlleiter die H_{20} -Welle hinzu ($m = 4$). Im Mittel herrscht die Tendenz nach immer kleineren Re-

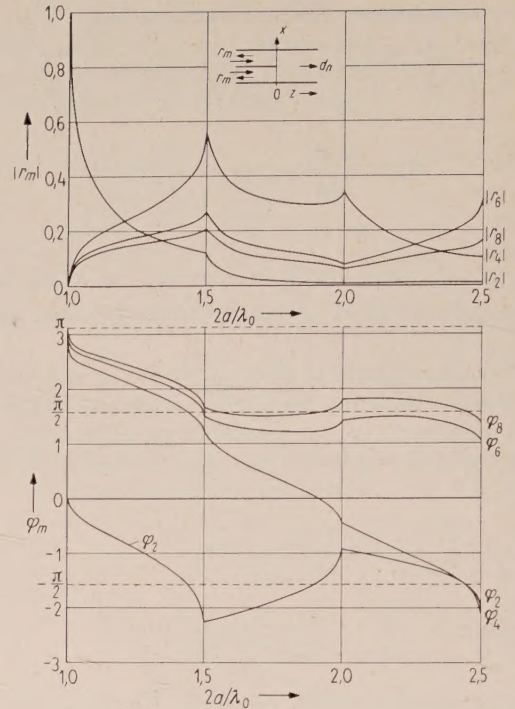


Bild 6. Die entsprechend Gl. (9) normierten Reflexionskoeffizienten $|r_m| e^{j\varphi_m}$ an der Stoßstelle $z = 0$ nach Bild 2 für $m = 2, 4, 6$ und 8 .

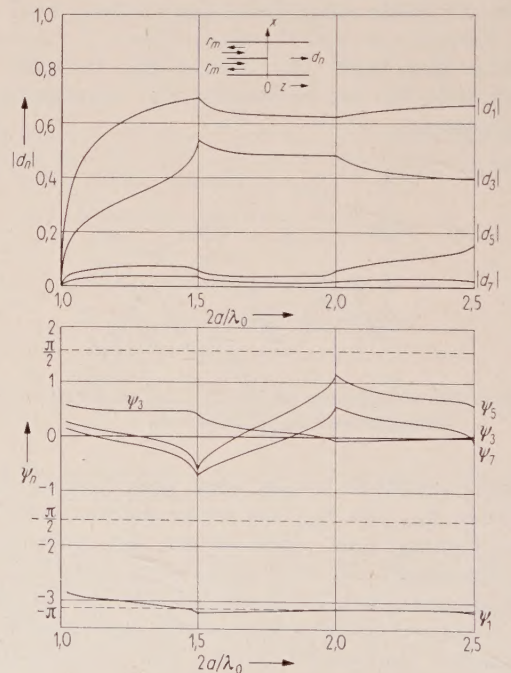


Bild 7. Die entsprechend Gl. (9) normierten Durchlaßkoeffizienten $|d_m| e^{j\varphi_n}$ an der Stoßstelle $z = 0$ nach Bild 2 für $n = 1, 3, 5$ und 7 .

flexionsfaktoren vor, je höher die Frequenz wird, wie es nicht anders zu erwarten ist. Auffallend sind die Spitzen in den Kurven für $|r_m|$ und φ_m an den Intervallgrenzen. Dieses Verhalten zeigen auch die Kurven für die komplexen Durchlaßkoeffizienten

$$d_n = |d_n| e^{i\varphi_n}, \quad (12)$$

die in Bild 7 für $n = 1, 3, 5$ und 7 wiedergegeben sind; sie wurden aus den Reflexionskoeffizienten r_m mit Hilfe von Gl. (7) berechnet. Der Durchlaßkoeffizient d_1 der Grundwelle H_{10} steigt von Null bei $2a/\lambda_0 = 1$ außerordentlich rasch mit wachsender Frequenz an, um dann annähernd konstant zu bleiben.

Eine notwendige Bedingung für die Richtigkeit der Ergebnisse ist, daß die Leistungsbilanz stimmt. Danach muß die Leistung der einfallenden Welle im ankommenden Leiter gleich der Leistung der reflektierten und der durchgehenden Wellen sein. Nun ist die resultierende Leistung für $z < 0$

$$P_1 = 2 \int_0^a [E_y H_x^* + E_y^* H_x] dx \quad (13)$$

und für $z > 0$

$$P_2 = \int_0^{2a} E_y H_x^* + E_y^* H_x dx. \quad (14)$$

Setzt man nun in Gl. (13) die Ausdrücke aus Gl. (1) und in Gl. (14) die aus Gl. (5) ein, so erhält man die Leistungsbilanz in der normierten Form zu

$$1 = 4 \sum_m \frac{|r_m|^2}{m^2} \frac{\beta_m}{\beta_2} + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_n |d_n|^2 \frac{\beta_n}{\beta_2}. \quad (15)$$

Hierbei sind die Summen nur über die Terme zu erstrecken, für die die Phasenkonstanten β_m bzw. β_n reell sind; d. h., man summiert nur über die existenzfähigen Wellentypen, weil die übrigen Dämpfungstypen keine Leistung transportieren können. Insbesondere sind im ersten Intervall $1 < 2a/\lambda_0 < 1,5$ nur jeweils die Grundwellen existenzfähig, so daß von jeder der beiden Summen in Gl. (15) nur je ein einziges Glied übrig bleibt. Dann ergibt sich aus Gl. (15)

$$1 = |r_2|^2 + \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 |d_1|^2 \frac{\beta_1}{\beta_2}. \quad (16)$$

Setzt man die Werte für $|r_m|$ und $|d_n|$ aus den Bildern 6 und 7 in Gl. (15) bzw. (16) ein, so zeigt sich, daß die Leistungsbilanz stimmt.

Aus der bisherigen Lösung ergibt sich ohne Schwierigkeit eine weitere Lösung für den unsym-

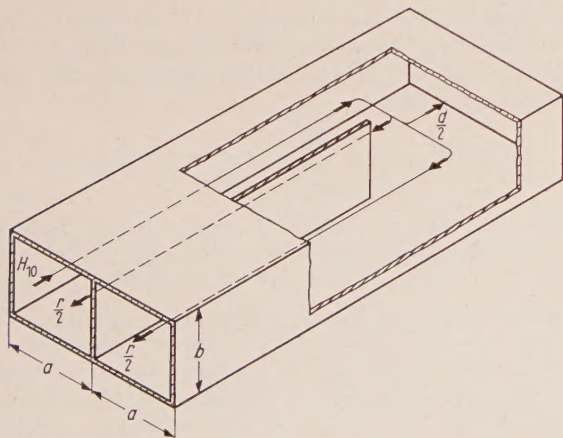


Bild 8. Die Beugung einer H_{10} -Welle um eine Zwischenwand in einem Rechteckhohlleiter.

metrischen Fall, bei dem nur in den einen Hohlleiter ($0 < x < a$) eine H_{10} -Welle einfällt, während der parallele Hohlleiter nicht beaufschlagt ist (Bild 8). Um diesen Fall zu berechnen, wenden wir das Überlagerungsprinzip an, indem wir über die bisher betrachtete gerade Wellenkonstellation eine gleich große ungerade superponieren, wie es in Bild 9 dar-

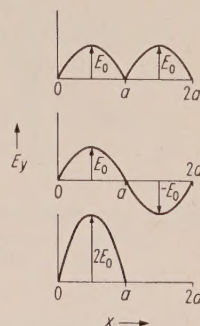


Bild 9. Überlagerung einer geraden und einer ungeraden Wellenkonstellation in den zwei parallelen Hohlleitern nach Bild 8 zu einer resultierenden.

gestellt ist. Dadurch entsteht in dem linken Hohlleiter ($0 < x < a$) eine einfallende Welle mit der doppelten Feldstärke $2E_0$, während sich beide Wellen in dem rechten Hohlleiter ($a < x < 2a$) aufheben. Dabei geht die ungerade Welle an der Stoßstelle $z = 0$ ohne Reflexion durch und setzt sich in dem breiten Hohlleiter ($0 < x < 2a$), d. h. für $z \geq 0$, als H_{20} -Welle mit gleicher Amplitude fort. Aus dieser Betrachtung folgt, daß die reflektierten Wellen in den beiden ankommenden Hohlleitern gleich groß sein müssen, obgleich nur in dem einen eine Welle ankommt.

Nach diesem Prinzip läßt sich jetzt die resultierende Feldverteilung vor und nach der Stoßstelle mit Hilfe der Gl. (1) und Gl. (5) angeben. Vor der Stoßstelle $z \leq 0$ erhält man folgenden Ausdruck in normierter Form:

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{2E_0} &= \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_2 z} + \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{m/2} \frac{r_m}{m} \sin \frac{m\pi x}{2a} e^{i\beta_m z} \\ &\quad \text{für } 0 < x < a, \\ \frac{E_y}{2E_0} &= - \sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} (-1)^{m/2} \frac{r_m}{m} \sin \frac{m\pi x}{2a} e^{i\beta_m z} \\ &\quad \text{für } a < x < 2a. \end{aligned} \quad (17)$$

Nach der Stoßstelle $z \geq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{E_y}{2E_0} &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\beta_2 z} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{(1+n)/2} \\ &\quad \cdot d_n \sin \frac{n\pi x}{2a} e^{-i\beta_n z} \quad \text{für } 0 < x < 2a. \end{aligned} \quad (18)$$

Hierin bedeuten r_m und d_n die normierten komplexen Reflexions- und Durchlaßkoeffizienten, die in den Bildern 6 und 7 als Funktion der normierten Frequenz $2a/\lambda_0$ dargestellt sind. Um die Formeln für die magnetische Feldstärke H_x zu erhalten, hat man nur jeden Term durch den zugehörigen Wellenwiderstand Z_m oder Z_n nach Gl. (4) zu dividieren, wie aus Gl. (1) und (5) zu ersehen ist. Dabei muß noch ein negatives Vorzeichen hinzugefügt werden, wenn es sich um Wellen handelt, die in Richtung wachsender z fortschreiten.

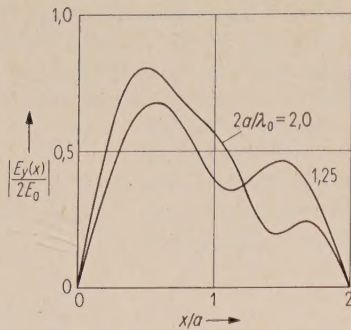


Bild 10. Das Feldstärkeprofil im breiten Hohlleiter im Abstand $z = a$ von der Trennwandkante in Bild 8 (nach Gl. (18)).

Um die Feldstärkenverteilung im breiten Hohlleiter zu veranschaulichen, ist in Bild 10 das Feldstärkeprofil im Abstand $z = a$ für die beiden Frequenzwerte $2a/\lambda_0 = 1,25$ und $2,0$ wiedergegeben. Hierbei ist für jeden Punkt x des Querschnitts der Betrag $|E_y(x)|$ der elektrischen Feldstärke als Ordinate aufgetragen. Man erkennt, daß das Profil um so einseitiger ist, je höher die Frequenz wird. Im Extremfall $\lambda_0 \rightarrow 0$ entsteht das vollkommen einseitige Profil nach Bild 9 unten.

3. Übergang von einem breiten Hohlleiter in zwei parallele Hohlleiter von halber Breite

Als zweite Aufgabe behandeln wir das zur ersten Aufgabe (siehe Abschnitt 2) komplementäre Problem nach Bild 11. Hier fällt die primäre H_{10} -Welle

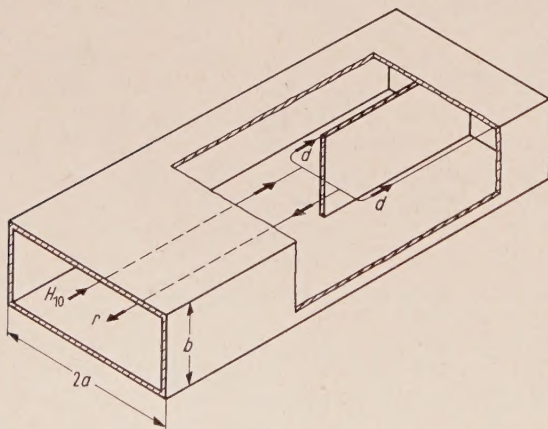


Bild 11. Übergang von einem breiten Hohlleiter in zwei parallele Hohlleiter halber Breite; r reflektierte Wellen, d durchgehende Wellen.

in den breiten Hohlleiter mit der Breite $2a$ ein und verzweigt sich dann auf die beiden schmalen Hohlleiter mit je der halben Breite a . Dabei entstehen im breiten Hohlleiter reflektierte Wellen und in den schmalen Hohlleitern durchgelassene Wellen entsprechend den Bildern 11 und 12. Die Stoßstelle sei wieder bei $z = 0$.

Vor der Stoßstelle ($z \leq 0$) haben wir daher den Lösungsansatz

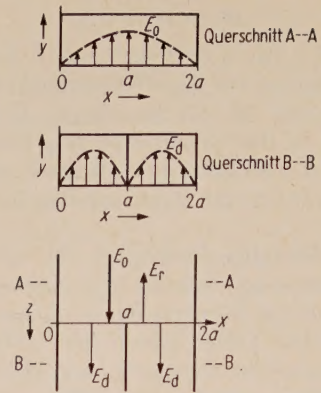


Bild 12. Schema eines breiten Hohlleiters ($2a$), der sich für $z > 0$ in zwei parallelen Hohlleitern der Breite a fortsetzt.

$$E_y = E_0 \sin \frac{\pi x}{2a} e^{-j\beta_1 z} + \sum_{n=1,3,5,\dots} E_{rn} \sin \frac{n\pi x}{2a} e^{j\beta_n z},$$

für $0 \leq x \leq 2a$, (19a)

$$H_x = -\frac{E_0}{Z_1} \sin \frac{\pi x}{2a} e^{-j\beta_1 z} + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{E_{rn}}{Z_n} \sin \frac{n\pi x}{2a} e^{j\beta_n z}.$$

(19b)

Der erste Term bedeutet wieder die einfallende Welle, während der zweite Term die Summe aller reflektierten Wellen ausdrückt. Die Funktionen $\sin n\pi x/2a$ sind für $n = 1$ und 3 in Bild 4 dargestellt. — Für die durchgehenden Wellen ($z \leq 0$) ist nun der Ansatz

$$E_y = \sum_{m=2,4,6,\dots} E_{dm} f_m(x) e^{-j\beta_m z}$$

für $0 \leq x \leq 2a$, (20a)

$$H_x = - \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{E_{dm}}{Z_m} f_m(x) e^{-j\beta_m z}$$

(20b)

passend, in dem die Funktionen $f_m(x)$ nach Gl. (2) definiert und für $m = 2$ und 4 in Bild 3 veranschaulicht sind.

Um die Stetigkeitsforderung für E_y und H_x an der Grenzfläche $z = 0$ befriedigen zu können, benutzen wir auch hier die Entwicklung der Funktionen $f_m(x)$ nach $\sin n\pi x/2a$ entsprechend Gl. (6). Dann erhalten wir aus der Stetigkeitsbedingung für E_y das Gleichungssystem

$$-1 + r_1 = 2 \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{d_m}{m^2 - 1} \quad \text{für } n = 1,$$

(21)

$$r_n = 2 \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{d_m}{m^2 - n^2} \quad \text{für } n = 3, 5, 7, \dots$$

Aus der Stetigkeit für H_x erhält man das System

$$-\frac{1}{Z_1} - \frac{r_1}{Z_1} = 2 \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{d_m}{Z_m(m^2 - 1)} \quad \text{für } n = 1,$$

(22)

$$-\frac{r_n}{Z_n} = 2 \sum_{m=2,4,6,\dots} \frac{d_m}{Z_m(m^2 - n^2)} \quad \text{für } n = 3, 5, 7, \dots$$

Dabei sind wieder normierte Reflexions- und Durchlaßkoeffizienten eingeführt worden entsprechend den Definitionen

$$\frac{(-1)^{(1+n)/2} E_{rn}}{E_0} = r_n, \quad \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{m/2} m E_{dm}}{2 E_0} = d_m. \quad (23)$$

Die Reflexionskoeffizienten r_n kann man nun eliminieren; dann entsteht für die Durchlaßkoeffizienten d_m das unendliche Gleichungssystem

$$\sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{Z_1}{Z_m}\right) d_m}{1 - m^2} = 1 \quad \text{für } n = 1, \quad (24)$$
$$\sum_{m=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{Z_n}{Z_m}\right) d_m}{n^2 - m^2} = 0 \quad \text{für } n = 3, 5, 7, \dots$$

Dieses Gleichungssystem für die komplexen Koeffizienten $d_m = |d_m| e^{j\varphi_m}$ läßt sich wieder nur approximativ lösen, indem man an Stelle des unendlichen ein endliches System von N Gleichungen nimmt. Wie bei dem komplementären Problem im Abschnitt 2 haben wir $N = 25$ gewählt; das bedeutet, daß wiederum 50 reelle Gleichungen mit 50 Unbekannten aufzulösen sind, eine Aufgabe, die nur mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine bewältigt werden kann. Das Ergebnis der Rechnungen ist in Bild 13 für das Frequenzintervall $0 < 2a/\lambda_0 < 2,5$ dargestellt. Hat man die Durchlaßkoeffizienten d_m ($m = 2, 4, 6, \dots, 50$), so erhält man nach Gl. (21) auch die Reflexionskoeffizienten r_n , die für $n = 1, 3, 5$ und 7 aus Bild 14 zu entnehmen sind.

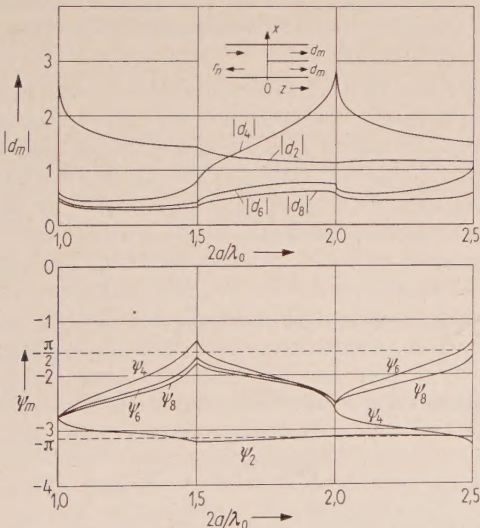


Bild 13. Die entsprechend Gl. (23) normierten Durchlaßkoeffizienten $|d_m| e^{j\varphi_m}$ an der Stoßstelle $z = 0$ nach Bild 12 für $m = 2, 4, 6$ und 8 .

Auffällig ist, daß der Durchlaßkoeffizient $|d_2|$ in Bild 13 an der unteren Intervallgrenze $2a/\lambda_0 = 1$ nicht nach Null geht wie $|d_1|$ in Bild 7, während der Reflexionskoeffizient $|r_1|$ nach eins strebt. Man könnte daraus schließen, daß die Leistungsbilanz versagt. Dies ist aber nicht der Fall, weil infolge des

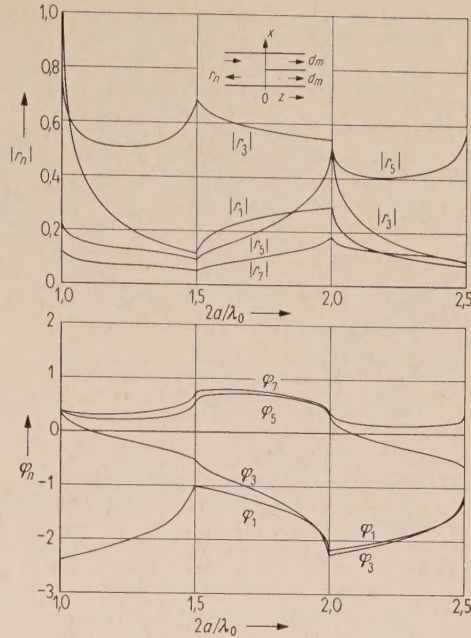


Bild 14. Die entsprechend Gl. (23) normierten Reflexionskoeffizienten $|r_n| e^{j\varphi_n}$ an der Stoßstelle $z = 0$ nach Bild 12 für $n = 1, 3, 5$ und 7 .

Anwachsens des Wellenwiderstandes Z_2 über alle Grenzen (nach Gl. (4)) keine Leistung durchgeht. In der Leistungsbilanz kommt dies auch formal zum Ausdruck. Sie lautet nämlich für das Intervall $0 \leq 2a/\lambda_0 \leq 1,5$, in dem nur je eine Welle existenzfähig ist,

$$1 = |r_1|^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 |d_2|^2 \frac{\beta_2}{\beta_1}. \quad (25)$$

Setzt man für die Phasenkonstante β_2 ihren Wert aus Gl. (3) ein, so erkennt man, daß β_2 an der unteren Intervallgrenze (d. h. für $2a/\lambda_0 = 1$) verschwindet. Die Formel (25) ist das Gegenstück zu Gl. (6); werden die errechneten Werte aus den Bildern 13 und 14 in Gl. (25) eingeführt, so stellt man fest, daß die Leistungsbilanz auch hier stimmt.

4. Zwei parallele Hohlleiter, deren Zwischenwand auf einer endlichen Länge unterbrochen ist

Wir betrachten jetzt den Fall eines endlichen Kopplungsraumes zwischen zwei parallelen Hohlleitern. Das bedeutet, daß der gemeinsame, breite Hohlleiter die endliche Länge l (die sog. Schlitzlänge) haben möge (Bild 15). Wir nehmen ferner an, daß in allen Teilen des Kopplers nur die jeweilige Grundwelle existenzfähig ist ($1 < 2a/\lambda_0 < 1,5$); weiterhin soll die Schlitzlänge l hinreichend groß sein, damit die höheren Wellentypen, die als Dämpfungstypen auftreten, im Verlauf von l so stark gedämpft sind, daß sie vernachlässigt werden können. Wir haben dann zwei Stoßstellen bei $z = 0$ und $z = l$, die miteinander in Wechselwirkung nach dem Schema in Bild 16 treten. Betrachten wir zunächst den Fall, daß die beiden primären Hohlleiter (d. h. für $z < 0$) mit je einer H_{10} -Welle der Amplitude eins gespeist werden (wie in Bild 9 oben). Dann wird der

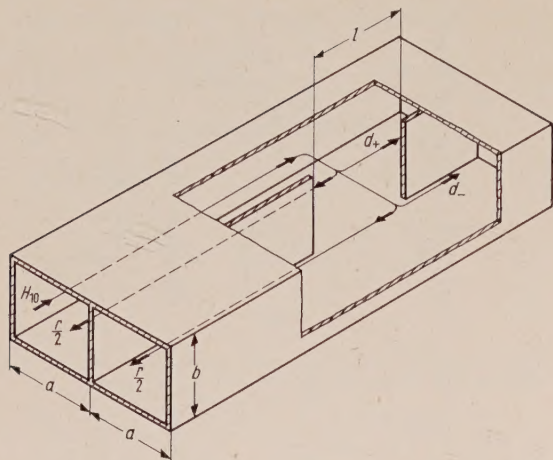


Bild 15. Zwei parallele Rechteckhohlleiter mit gemeinsamem Kopplungsraum der Länge l als Richtungskoppler.

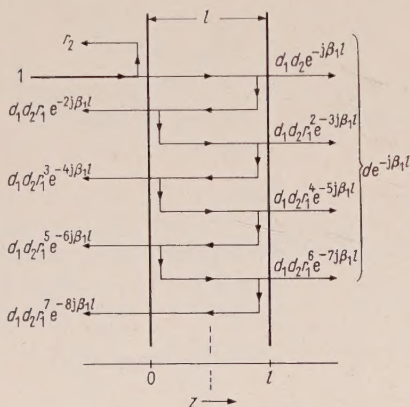


Bild 16. Zur Berechnung der resultierenden Reflexions- und Durchlaßkoeffizienten r und d bei einem Richtungskoppler mit der Kopplungslänge l entsprechend Bild 15.

Anteil r_2 reflektiert, und der Anteil $4d_1/\pi$ geht nach Gl. (9) in den Kopplungsraum. Diese durchgehende Welle trifft bei $z = l$ wieder auf eine Stoßstelle; infolgedessen wird von ihr wieder der Teil r_1 reflektiert, während der Teil $\pi d_2/4$ nach Gl. (23) in den abgehenden Hohlleitern ($z > l$) abgeführt wird. Dieses Spiel wiederholt sich an beiden Stoßstellen immer wieder, so daß wir das Schema in Bild 16 erhalten. Wir definieren jetzt einen resultierenden Reflexionskoeffizienten r als Summe aller reflektierten Anteile und einen Durchgangskoeffizienten d als Summe aller durchgehenden Anteile. Die dabei auftretenden Summen bilden eine geometrische Reihe, für die man demnach einen geschlossenen Ausdruck erhält. Daher ergibt sich der resultierende Durchlaßkoeffizient d (ohne den Faktor $e^{-j\beta_1 l}$) zu

$$d = \frac{d_1 d_2}{1 - r_1^2 e^{-2j\beta_1 l}}, \quad (26)$$

während der resultierende Reflexionskoeffizient nach der Formel

$$r = r_2 + r_1 d e^{-2j\beta_1 l} \quad (27)$$

zu berechnen ist (d nach Gl. (26))³. Die hierin vorkommenden komplexen Größen $|r_2|e^{j\varphi_2}$ und $|d_1|e^{j\varphi_1}$ sind aus den Bildern 6 und 7 zu entnehmen; dagegen erhält man $|d_2|e^{j\varphi_2}$ und $|r_1|e^{j\varphi_1}$ aus den Bildern 13 und 14. Der Inhalt der Gl. (26) und (27) ist nun in den Bildern 17 und 18 wiedergegeben, in denen sowohl die Beträge $|d|$ und $|r|$ als auch die

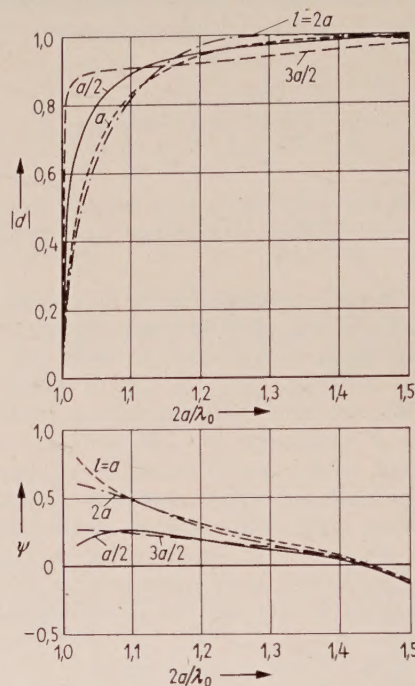


Bild 17. Der Durchlaßkoeffizient $|d|e^{j\psi}$ nach Gl. (26) eines Richtungskopplers für verschiedene Schlitzlängen l (symmetrische Speisung nach Bild 9 oben).

zugehörigen Winkel ψ und φ für vier verschiedene Schlitzlängen $l = a/2, a, 3a/2$ und $2a$ in Abhängigkeit von der normierten Frequenz $2a/\lambda_0$ dargestellt sind. Man erkennt, daß der Betrag $|d|$ des Durchlaßkoeffizienten d (Bild 17) von Null bei $2a/\lambda_0 = 1$ (Grenzfrequenz) zunächst rasch wächst, um dann in der Nähe von $|d| = 1$ zu verlaufen. Am schnellsten ist dieser Anstieg für die Schlitzlänge $l = 3a/2$. Hierzu komplementär verläuft der Betrag $|r|$ des Reflexionskoeffizienten r nach Bild 18. Er fällt von dem Wert eins bei der Grenzfrequenz $2a/\lambda_0 = 1$ auf kleine Werte ab. Wie man leicht feststellt, ist für alle Werte die Leistungsbilanz erfüllt, nach der

$$|d|^2 + |r|^2 = 1 \quad (28)$$

sein muß.

Wir gehen jetzt dazu über, die Vorgänge bei einseitiger Speisung zu berechnen. Nach dem in Bild 9 dargestellten Prinzip überlagern wir zu diesem Zweck wieder über die gerade Lösung nach Gl. (26) und (27) eine ungerade Wellenverteilung, so daß in dem Hohlleiter $0 < x < a$ eine Feldverteilung mit doppelter Amplitude $2E_0$ entsteht, während sich die

³ Wenn der Maximalwert der elektrischen Feldstärke in der ankommenden Welle bei $z = 0$ den Wert E_0 hat, so ist mithin gemäß Gl. (9) der entsprechende Wert der reflektierten Welle $E_r = -rE_0$.

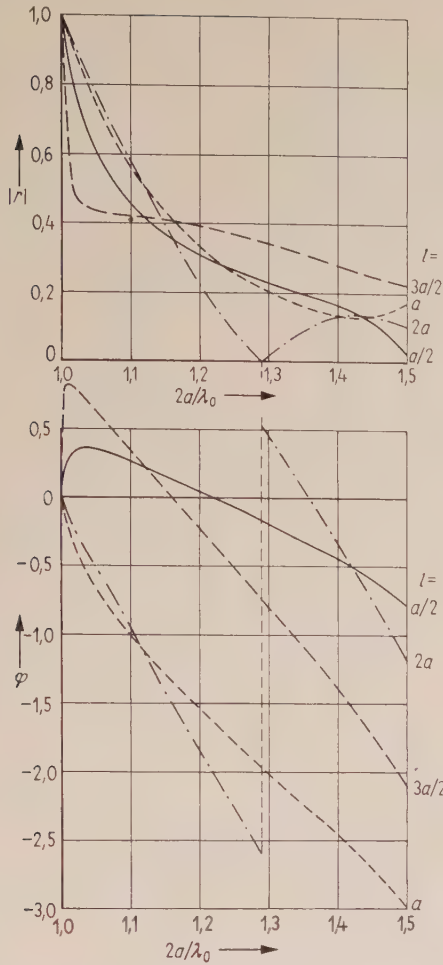


Bild 18. Der Reflexionskoeffizient $|r|e^{j\varphi}$ nach Gl. (27) eines Richtungskopplers für verschiedene Schlitzlängen l (symmetrische Speisung nach Bild 9 oben).

beiden Feldverteilungen im Hohlleiter $a < x < 2a$ auslöschen. Die ungerade Wellenverteilung geht ungehindert durch, so daß wir als Durchlaßkoeffizienten d_+ für $z > l$ den Ausdruck

$$d_+ = \frac{1}{2} (e^{-j\beta_2 l} + d e^{-j\beta_1 l}) \quad \text{für } 0 < x < a \quad (29)$$

haben. In dem benachbarten Hohlleiter ergibt sich dementsprechend

$$d_- = \frac{1}{2} (e^{-j\beta_2 l} - d e^{-j\beta_1 l}) \quad \text{für } a < x < 2a. \quad (30)$$

Die Durchlaßkoeffizienten d_+ und d_- sind relativ zur Amplitude $2E_0$ zu verstehen. Für d ist der Ausdruck aus Gl. (26) einzusetzen. Der Reflexionskoeffizient bleibt in beiden Hohlleitern gleich. Er ist gleich $r/2$, bezogen wieder auf die Amplitude $2E_0$ der einfallenden Welle.

In Bild 19 sind die Beträge der Durchlaßkoeffizienten $|d_+|$ bzw. $|d_-|$ dargestellt. Sie beginnen mit dem Wert 0,5 für die Grenzfrequenz $2a/\lambda_0 = 1$. Die Leistungsbilanz lautet jetzt

$$|d_+|^2 + |d_-|^2 + \frac{1}{2} |r|^2 = 1; \quad (31)$$

sie ist für alle Werte erfüllt, wie man sich durch

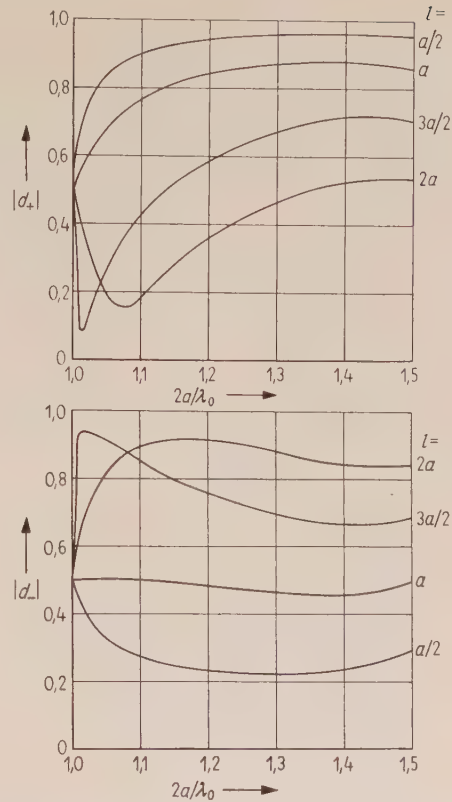


Bild 19. Die Durchlaßkoeffizienten $|d_+|$ und $|d_-|$ eines Richtungskopplers nach Bild 15 für verschiedene Schlitzlängen l (einseitige Speisung nach Bild 9 unten).

Einsetzen der Kurvenwerte aus den Bildern 18 und 19 überzeugen kann.

Für die Verwendung dieser Anordnung in Frequenzweichen ist der Fall von Bedeutung, bei dem sich die abgehende Leistung zu gleichen Teilen auf die beiden Hohlleiter aufteilt, d. h., wenn $|d_+| = |d_-|$ ist. In Bild 20 ist das Verhältnis $|d_+|/|d_-|$ aufgetragen. Wie man erkennt, gibt es für die Schlitzlänge $l = 3a/2$ eine bestimmte Frequenz, nämlich $2a/\lambda_0 = 1,32$, bei der der Quotient den Wert eins hat. Weicht die Schlitzlänge l wesentlich von $3a/2$ ab, so gibt es keine Frequenz, bei der diese Eigenschaft auftritt. Nach Bild 19 betragen für $2a/\lambda_0 = 1,32$ und $l = 3a/2$ die Durchlaßkoeffizienten $|d_+| = |d_-| \approx 68,6\%$ und der Reflexionskoeffizient nach Bild 18 $r/2 \approx 16,6\%$. Mithin geht $2(0,686)^2 = 94,5\%$ der Leistung durch, und $2(0,166)^2 = 5,5\%$ wird reflektiert.

Die Kurve für die Schlitzbreite $l = 3a/2$ in Bild 20 läßt vermuten, daß es für eine höhere Frequenz als $2a/\lambda_0 = 1,5$ noch einen zweiten Einsdurchgang gibt, wie es auch die Messungen zeigen. — Der oben angegebene Reflexionsfaktor von 16,6% ist natürlich für praktische Bedürfnisse bei weitem zu groß. Die hier wiedergegebene Rechnung beweist, daß man ohne zusätzliche Maßnahmen nicht auskommt, wenn man ihn auf Werte von etwa 1% und kleiner herabdrücken will. Als solche Maßnahme hat sich beispielsweise eine zusätzliche Kapazität in der

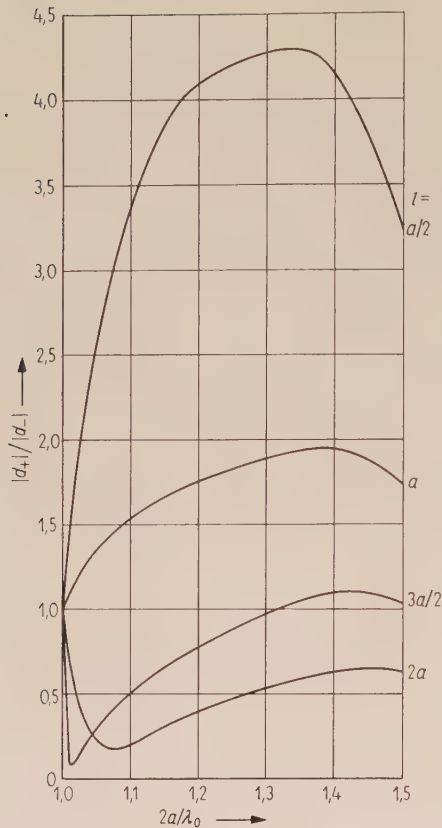


Bild 20. Das Verhältnis der Durchlaßkoeffizienten $|d_+|$ und $|d_-|$ bei einem Richtungskoppler nach Bild 15 für verschiedene Schlitzlängen l (einseitige Speisung nach Bild 9 unten).

Schlitzmitte bewährt; diese Kapazität stellt man durch eine in den Koppelraum hineinragende Schraube empirisch ein.

5. Zusammenfassung

Es werden zwei parallele Rechteckhohlleiter betrachtet, deren Zwischenwand auf einer beliebigen Länge l unterbrochen ist. Die Unterbrechungslänge kann auch unendlich groß sein; es entsteht dann der ebenfalls behandelte Fall, bei dem zwei Rechteckhohlleiter sich in einem gemeinsamen Hohlleiter

doppelter Breite fortsetzen. Fällt in dem einen Hohlleiter eine H_{10} -Welle ein, so wird ihre Leistung zerstreut; ein Teil tritt in Form von gleich großen rückläufigen Wellen in den beiden ankommenden Hohlleitern auf. Der Rest verteilt sich auf die beiden abgehenden Hohlleiter. In dem gemeinsamen Koppelraum wirken alle Wellen wechselseitig aufeinander ein. Das Problem wird exakt durch ein unendliches lineares Gleichungssystem formuliert, das sich nur mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine lösen läßt. Dabei mußten 25 komplexe Gleichungen (das sind 50 reelle Gleichungen) berücksichtigt werden, um eine praktisch ausreichende Übereinstimmung mit den asymptotischen Endwerten für unendlich viele Gleichungen garantieren zu können. Die Ergebnisse werden in normierter Form durch Kurven mitgeteilt, wobei die sogenannten Reflexions- und Durchlaßkoeffizienten als Funktion der normierten Frequenz $2a/\lambda_0$ (a Hohlleiterbreite, λ_0 Wellenlänge) für verschiedene Schlitzbreiten l/a dargestellt sind. Diese Koeffizienten beziehen sich nicht auf Leistungen, sondern auf Feldstärken. Es zeigt sich unter anderem, daß es bei der Schlitzbreite $l/a = 3/2$ eine bestimmte Frequenz $2a/\lambda_0 = 1,32$ gibt, bei der die abgehende Leistung sich zu gleichen Teilen auf die beiden Hohlleiter verteilt, obgleich die Speisung einseitig ist. Eine solche Konstellation ist wichtig für die Verwendung in Frequenzweichen. Der Betrag des Reflexionskoeffizienten ist hierbei 16,6% und der Betrag des Durchlaßkoeffizienten 68,6%. In diesem Fall geht also 94,5% der einfallenden Leistung durch, während 5,5% reflektiert wird. Da dieser Reflexionsfaktor für praktische Bedürfnisse zu groß ist, muß man ihn durch besondere Maßnahmen herabdrücken, was man beispielsweise durch eine zusätzliche Kapazität in der Mitte des Koppelraumes erreichen kann. Damit erzielt man Reflexionsfaktoren, die kleiner als 1% sind.

Schrifttum

- [1] MARCUVITZ, N., Waveguide Handbook. McGraw-Hill Book Co., New York 1951.
- [2] RIBLETT, H. J., The short slot hybrid function. Proc. Inst. Radio Engrs. **40** [1952], 180–184.
- [3] PIEFKE, G., Reflexion elektromagnetischer Wellen an Metallplattenmedien. A.E.Ü. **8** [1954], 101–110.
- [4] STÖSSER, W., Der 3-db-Koppler. Frequenz **14** [1960], 117–123.

Theorie nichtreziproker Schaltungen mit gleicher Eingangs- und Ausgangsfrequenz unter Verwendung nichtlinearer Halbleiterelemente

VON ROBERT MAURER und KARL-HEINZ LÖCHERER

Mitteilung aus dem Röhrenlaboratorium der Telefunken G.m.b.H., Ulm (Donau)

(A.E.U. 15 [1961], 71–83; eingegangen am 31. Oktober 1960)

DK 621.375.4

Für nichtreziproke Verstärkerschaltungen, die aus der Kettenschaltung eines Tunnelnodiens-Auf- und -Abwärtsmischers oder Reaktanznodiens-Auf- und -Abwärtsmischers bestehen, werden die Vierpolgleichungen und der Übertragungsgewinn abgeleitet. Wenn die Tunnel- oder Reaktanznodiens mit verschiedenphasigen Oszillatorspannungen gespeist werden, so kann durch einen zusätzlichen linearen, passiven und reziproken Koppelleitwert in Rückwärtsrichtung Entkopplung erreicht werden.

Für gemischte Schaltungen mit einer Tunneldiode und einer Reaktanzdiode ist die Entkopplung zwischen Aus- und Eingang auch schon dann möglich, wenn die Oszillatorspannungen gleiche oder entgegengesetzte Phasenlage haben.

Beim Betrieb der Mischerkette in Frequenzengleichlage ist stets Leistungsanpassung am Ein- und Ausgang möglich. Dabei ist der Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung bei geeigneter Bemessung der Oszillatorleistung größer als eins, wenn zwei Tunnelnodiens oder eine Reaktanzdiode und eine Tunneldiode verwendet werden. Wenn die Schaltung dagegen zwei Reaktanznodiens enthält, wirkt sie als Isolator.

Bei Frequenzenkehrlage kann der Übertragungsgewinn stets größer als eins gemacht werden. Gleichzeitige Leistungsanpassung am Ein- und Ausgang ist dann jedoch nur bei Verwendung zweier Tunnelnodiens möglich.

The four-pole equations and the transducer gain are derived for nonreciprocal amplifiers, consisting of cascaded tunnel diode up- and downconverters or cascaded parametric diode up- and downconverters. If the tunnel or parametric diodes are fed with pump voltages of different phases, decoupling between output and input can be achieved by means of an additional linear, passive and reciprocal coupling admittance.

For mixed devices containing one tunnel diode and one parametric diode such decoupling between output and input is possible even for pump voltages of equal or opposite phases.

In the noninverting case power matching at the input and output is always possible. If two tunnel diodes or one tunnel diode and one parametric diode are used, the numerical transducer gain in the forward direction can exceed unity if the pump power is properly chosen. With two parametric diodes the device operates as an isolator, however.

In the inverting case the value of the numerical transducer gain can always be made to exceed unity, but simultaneous power matching at input and output is then possible only with the use of two tunnel diodes.

1. Einleitung

Geradeausverstärker, die eine einzige Reaktanz- oder Tunneldiode als aktives Element enthalten, sind reziprok [1], [2], d. h. die Widerstände bzw. Leitwerte in der Nebendiagonale der Widerstands- bzw. Leitwertmatrix sind gleich. Diese Verstärker haben demzufolge den Nachteil, daß ausgangsseitige Störspannungen, die innerhalb des Durchlaßbereiches des Geradeausverstärkers liegen, verstärkt an den Eingangsklemmen erscheinen. Außerdem wirken sich Schwankungen des Lastleitwertes als verstärkte Schwankungen des Eingangsleitwertes aus. Nichtreziproke Schaltungen dagegen können durch eine zusätzliche Rückkopplung entkoppelt oder neutralisiert werden, wie das auch von Röhrenschaltungen her bekannt ist. Der Eingangsleitwert ist dann unabhängig von der Last, und der Ausgangsleitwert ist unabhängig vom Innenleitwert der Signalquelle. Außerdem wird die Übertragung von ausgangsseitigen Störspannungen auf den Eingang vermieden, und die Anpassung und Abstimmung des Eingangskreises ist unabhängig von der Anpassung und Abstimmung des Ausgangskreises.

Ein Beispiel für einen nichtreziproken Verstärker ist der parametrische Wanderwellenverstärker, der mehrere Reaktanznodiens enthält, die verschiedenphasig gepumpt werden [3]. Der Aufbau derartiger Verstärker mit vielen nichtlinearen Elementen ist sehr aufwendig. Trotzdem ermöglicht dieser Verstärkertyp keine Entkopplung zwischen Ausgang und Eingang, sondern nur eine Abschwächung des Übertragungsgewinns in Richtung vom Ausgang zum Eingang auf den Wert eins.

Im folgenden werden Schaltungen angegeben, die nur zwei nichtlineare Elemente enthalten und damit bereits eine Entkopplung zwischen Ausgang und Eingang ermöglichen. Es handelt sich dabei um Kettenschaltungen aus einem Aufwärts- und einem Abwärtsmischer, die je ein nichtlineares Element enthalten. Die beiden nichtlinearen Elemente werden gleichzeitig von einer Signalspannung und einer Pump- bzw. Oszillatorspannung durchgesteuert. Wenn beide Mischer je eine Reaktanzdiode oder je eine Tunneldiode enthalten, so ist die Mischerkette bezüglich der Phasenlage der Signalübertragung nichtreziprok, falls die an den beiden nichtlinearen

Elementen liegenden Pumpspannungen verschiedene Phasenwinkel haben. Durch Hinzuschalten eines passiven, linearen und reziproken Koppelnetzwerkes zwischen Ein- und Ausgang der Mischerkette kann die phasenmäßige Nichtreziprozität der Signalübertragung zu einer betragsmäßigen erweitert werden. Bei geeigneter Dimensionierung des Koppelnetzwerkes ist bei diesen Schaltungen eine Entkopplung zwischen Aus- und Eingang möglich. Wenn einer der beiden Mischer eine Reaktanzdiode und der andere eine Tunnel diode enthält, so ist die Mischerkette bereits ohne Verwendung eines Koppelnetzwerkes stets betragsmäßig nichtreziprok, also auch schon dann, wenn die an den beiden nichtlinearen Elementen liegenden Pumpspannungen gleiche Phasenwinkel haben. Die Entkopplung zwischen Ausgang und Eingang kann wieder durch ein geeignet dimensioniertes Koppelnetzwerk erreicht werden.

2. Die Konversionsmatrizen nichtlinearer Elemente bei Durchsteuerung mit Signal- und Oszillatorspannungen beliebiger Phasenwinkel

Die Schaltungen zum Betrieb einer Halbleiterdiode im Flußgebiet mit nichtlinearer I - U -Kennlinie und einer gleichstrommäßig in Sperrichtung geschalteten Kapazitätsdiode mit nichtlinearer Q - U -Kennlinie sind in Bild 1 a und b dargestellt. Die

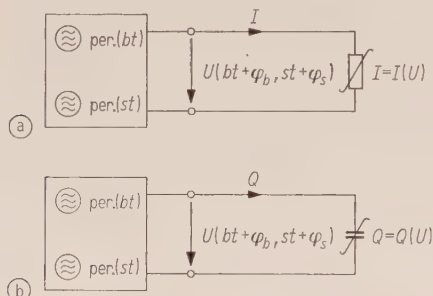


Bild 1. (a) Betriebsgenerator einer Tunnel diode mit nichtlinearer Strom-Spannungs-Kennlinie $I(U)$.
(b) Betriebsgenerator einer Reaktanz diode mit nichtlinearer Ladungs-Spannungs-Kennlinie $Q(U)$.

Dioden werden von Generatoren mit inneren Strom- oder Spannungsquellen gespeist. Die Oszillatorkreisfrequenz (= Betriebs- bzw. Pumpkreisfrequenz) ist mit b bezeichnet, die Signalkreisfrequenz mit s . Die Generatorströme bzw. -spannungen werden als periodische Funktionen in bt bzw. st vorausgesetzt. Damit sind auch die Diodenströme und -spannungen periodische Funktionen in bt bzw. st . Alle diese Ströme und Spannungen lassen sich in bekannter Weise [4] in doppelte Fourierreihen bezüglich der Variablen b und s entwickeln. Der im allgemeinen nichtlineare Zusammenhang zwischen den einzelnen Strom- und Spannungskomponenten bei der Tunnel diode bzw. zwischen den einzelnen Ladungs- und Spannungskomponenten bei der Reaktanz diode kann durch ein lineares Gleichungssystem angenähert werden, wenn wir schwache Signalaussteuerung voraussetzen. Zur Erläuterung dieser Verhältnisse

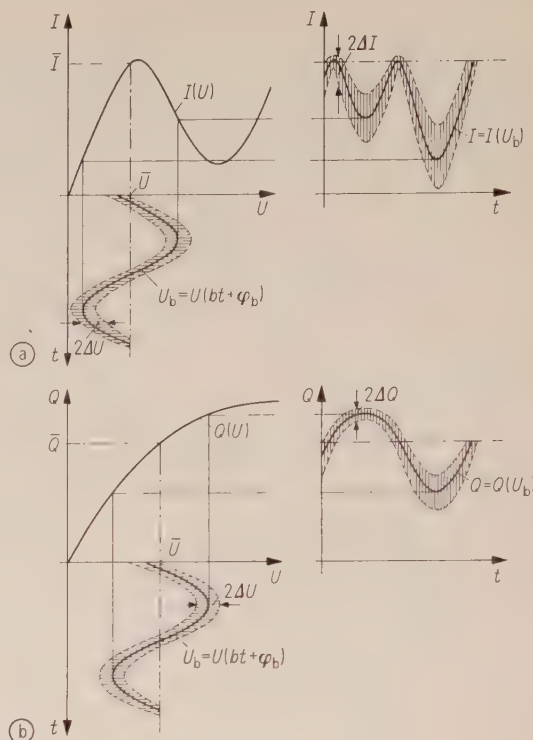


Bild 2. (a) Mischung an der nichtlinearen $I(U)$ -Kennlinie der im Flußgebiet betriebenen Tunnel diode.
(b) Mischung an der nichtlinearen $Q(U)$ -Kennlinie der im Sperrgebiet betriebenen Reaktanz diode.

ist in Bild 2a die Kennlinie $I = I(U)$ einer Tunnel diode in Flußrichtung und in Bild 2b die Kennlinie $Q = Q(U)$ einer gleichstrommäßig in Sperrichtung betriebenen Kapazitäts diode schematisch dargestellt. In den unteren Teilen von Bild 2a und b ist die Zeitabhängigkeit der Diodenspannung $U = U(bt + \varphi_b, st + \varphi_s)$ bei beliebigen Phasenwinkeln φ_b bzw. φ_s der Betriebs- bzw. Signalspannung eingezeichnet. Bei fehlendem Signal wird die Diodenspannung durch die ausgezogenen Kurven beschrieben, die den Verlauf der in bt periodischen und im folgenden stets als kosinusförmig vorausgesetzten Betriebsspannung $U_b = U(bt + \varphi_b) = \hat{U}_b \cos(bt + \varphi_b)$ wiedergeben. Der Betriebsspannung U_b überlagert sich bei schwacher Signalaussteuerung die kleine Spannung

$$\Delta U = U(bt + \varphi_b, st + \varphi_s) - U(bt + \varphi_b), \quad (1)$$

so daß die gesamte Diodenspannung $U(bt + \varphi_b, st + \varphi_s)$ innerhalb der schmalen, schraffiert gezeichneten Streifen verläuft. In Bild 2a und b sind rechts die zeitlichen Verläufe des Stromes I und der Ladung Q dargestellt, die sich aus den Kennlinien $I = I(U)$ und $Q = Q(U)$ für die Spannung $U = U(bt + \varphi_b, st + \varphi_s)$ ergeben. Die ausgezogene Stromkurve $I = I(U_b) = I[U(bt + \varphi_b)]$ in Bild 2a bzw. die ausgezogene Ladungskurve $Q = Q(U_b) = Q[U(bt + \varphi_b)]$ in Bild 2b gelten wiederum bei fehlendem Signal. Die durch das Signal hervorgerufene kleine Änderung

$$\Delta I = I[U(bt + \varphi_b) + \Delta U] - I[U(bt + \varphi_b)] \quad (2)$$

des Stromes bzw. die kleine Änderung

$$\Delta Q = Q[U(bt + \varphi_b) + \Delta U] - Q[U(bt + \varphi_b)] \quad (3)$$

der Ladung liegen in den schmalen schraffierten Bereichen. Aus den Gl. (1) bis (3) erhalten wir durch Taylorentwicklungen in linearer Näherung die Beziehung

$$\Delta I = S(bt + \varphi_b) \Delta U \quad (4)$$

zwischen den Strom- und Spannungssignalen bzw. den Zusammenhang

$$\Delta Q = C(bt + \varphi_b) \Delta U \quad (5)$$

zwischen den Ladungs- und Spannungssignalen. Die Größe

$$S(bt + \varphi_b) = \left[\frac{dI(U)}{dU} \right]_{U=U_b} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S^{(n)} e^{jnbt} \quad (6)$$

ist die in bt periodische Steilheit der Tunneldiode im Durchlaßgebiet beim Durchsteuern mit der Pumpspannung der Frequenz b , während die Größe

$$C(bt + \varphi_b) = \left[\frac{dQ(U)}{dU} \right]_{U=U_b} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C^{(n)} e^{jnbt} \quad (7)$$

die in bt periodische Kapazität der Diode im Sperrgebiet darstellt. Die Steilheit $S = S(bt + \varphi_b)$ ergibt sich aus der Neigung der Kennlinie $I = I(U)$ im linken Teil des Bildes 2a, die Kapazität $C = C(bt + \varphi_b)$ aus der Neigung der Kennlinie $Q = Q(U)$ im linken Teil des Bildes 2b.

Aus Gl. (6) erhalten wir den Ausdruck

$$S^{(n)} = \frac{e^{jn\varphi_b}}{2\pi} \int_0^{2\pi} S[U(bt + \varphi_b)] e^{-jn(bt + \varphi_b)} d(bt + \varphi_b) \quad (8)$$

für die Fourierkomponenten der zeitabhängigen Steilheit und aus Gl. (7) den Wert

$$C^{(n)} = \frac{e^{jn\varphi_b}}{2\pi} \int_0^{2\pi} C[U(bt + \varphi_b)] e^{-jn(bt + \varphi_b)} d(bt + \varphi_b) \quad (9)$$

für die Fourierkomponenten der zeitabhängigen Kapazität. Dabei gilt $S^{(-n)} = S^{(n)*}$ und $C^{(-n)} = C^{(n)*}$. Die Integrale in den Gl. (8) und (9) sind von φ_b unabhängig, so daß die Steilheits- und Kapazitätskomponenten $S^{(n)}$ und $C^{(n)}$ nur gemäß dem Faktor $e^{jn\varphi_b}$ von dem Phasenwinkel φ_b der Pumpspannung abhängen. Wenn wir von den Zeitfunktionen $S = S(bt + \varphi_b)$, $C = C(bt + \varphi_b)$ und

$$\begin{aligned} \Delta I &= \sum_{\nu=\pm 1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} I_{\mu b + \nu s} e^{j(\mu b + \nu s)t}, \\ \Delta Q &= \sum_{\nu=\pm 1} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} Q_{\mu b + \nu s} e^{j(\mu b + \nu s)t}, \\ \Delta U &= \sum_{\nu=\pm 1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{kb + \nu s} e^{j(kb + \nu s)t} \end{aligned}$$

zu den entsprechenden Fourierkomponenten übergehen, so erhalten wir mit $\mu = k + n$ aus den Gl. (4) bis (7) die linearen Beziehungen

$$I_{\mu b + \nu s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S^{(\mu-k)} U_{kb + \nu s} \quad (10)$$

$$\text{mit } I_{-(\mu b + \nu s)} = I_{\mu b + \nu s}^*, \quad U_{-(kb + \nu s)} = U_{kb + \nu s}^*$$

$$\text{und } Q_{\mu b + \nu s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C^{(\mu-k)} U_{kb + \nu s} \quad (11)$$

$$\text{mit } Q_{-(\mu b + \nu s)} = Q_{\mu b + \nu s}^*$$

zwischen den zur Frequenz $kb + \nu s$ gehörenden Spannungskomponenten $U_{kb + \nu s}$ und den zur Frequenz $\mu b + \nu s$ gehörenden Strom- bzw. Ladungskomponenten $I_{\mu b + \nu s}$ bzw. $Q_{\mu b + \nu s}$. Wir wollen jetzt in Gl. (11) an Stelle der Ladungskomponenten $Q_{\mu b + \nu s}$ die Stromkomponenten $I_{\mu b + \nu s}$ einführen. Aus dem allgemeinen Zusammenhang $I = dQ/dt$ zwischen Ladung, Zeit und Strom folgt die Beziehung

$$I_{\mu b + \nu s} = j(\mu b + \nu s) Q_{\mu b + \nu s} \quad (12)$$

für die Fourierkomponenten. Aus den Gl. (11) und (12) ergibt sich somit der Zusammenhang

$$I_{\mu b + \nu s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} j(\mu b + \nu s) C^{(\mu-k)} U_{kb + \nu s} \quad (13)$$

zwischen den Fourierkomponenten von Strom und Spannung der Kapazitätsdiode. Wenn wir lediglich die Strom- und Spannungskomponenten der drei Frequenzen s , $b + s$ und $b - s$ berücksichtigen, so vereinfacht sich das System der Gl. (10) zu den drei Gleichungen

$$\begin{pmatrix} I_s \\ I_{b+s} \\ I_{b-s}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^{(0)} & S^{(1)*} & S^{(1)} \\ S^{(1)} & S^{(0)} & S^{(2)} \\ S^{(1)*} & S^{(2)*} & S^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_s \\ U_{b+s} \\ U_{b-s}^* \end{pmatrix} \quad (14)$$

und das System der Gl. (13) zu den drei Gleichungen

$$\begin{pmatrix} j s C^{(1)*} & j s C^{(1)} \\ j(b+s) C^{(0)} & j(b+s) C^{(2)} \\ -j(b-s) C^{(2)*} & -j(b-s) C^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_s \\ U_{b+s} \\ U_{b-s}^* \end{pmatrix} \quad (15)$$

Die Gl. (14) und (15) gelten für die in Bild 1a und b für Ströme und Spannungen gewählten Pfeilrichtungen. Die Steilheitskomponenten $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$ in Gl. (14) und die Kapazitätskomponenten $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ sind gemäß den Gl. (8) und (9) von der Pumpphase φ_b abhängig. Die Gl. (14) und (15) sind der Ausgangspunkt der folgenden Betrachtungen.

3. Die Schaltung des nichtreziproken Tunneldioden- bzw. Reaktanzdioden-Verstärkers

In Bild 3 ist die Grundsaltung eines nichtreziproken Tunneldioden- oder Reaktanzdioden-Verstärkers dargestellt. Sie besteht aus der Kettenschaltung eines Tunneldioden- bzw. Reaktanzdioden-Aufwärtsmischers und eines Tunneldioden- bzw. Reaktanzdioden-Abwärtsmischers. Die an den Dioden D_1 und D_2 liegenden Betriebsspannungen U_{b1} und U_{b2} haben

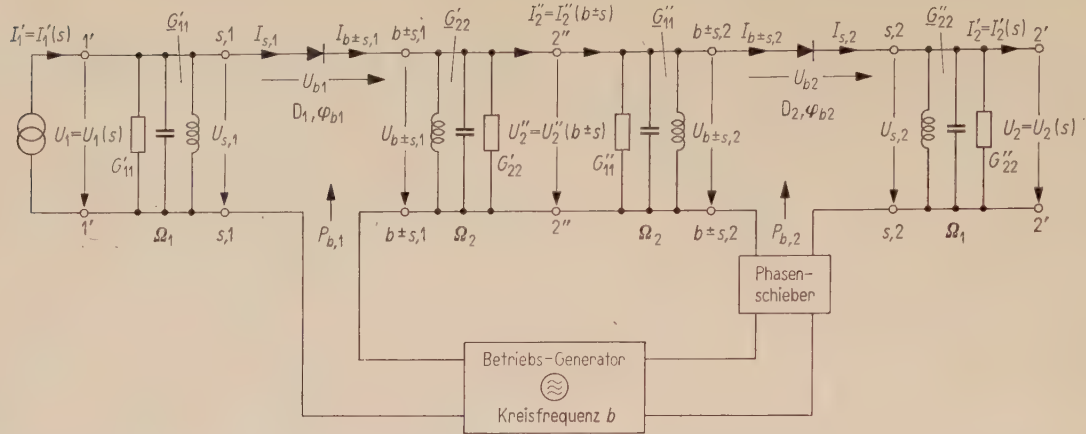


Bild 3. Kettenschaltung aus Reaktanzdioden-Aufwärts- und -Abwärtsmischer bzw. Tunneldioden-Aufwärts- und Abwärtsmischer, die mit verschiedenphasiger Betriebsspannung gespeist werden.

die Phasenwinkel φ_{b1} und φ_{b2} . Die unterschiedlichen Phasenwinkel werden durch einen Phasenschieber, der zwischen dem Betriebsgenerator und einem der beiden Mischer angeordnet ist, eingestellt. Zwischen den Eingangsklemmen 1' – 1' und den Ausgangsklemmen 2' – 2' der Kettenschaltung liegen Parallelschwingungskreise mit den komplexen Leitwerten $\underline{G}'_{11}$ und $\underline{G}''_{22}$. Ihre Resonanzkreisfrequenz ist mit Ω_1 bezeichnet. Die zwischen den Klemmen 2'' – 2'' liegenden Parallelschwingungskreise mit den Leitwerten $\underline{G}'_{22}$ und $\underline{G}''_{11}$ haben beim Betrieb der Schaltung in Frequenzenkehrlage die Resonanzkreisfrequenz $\Omega_2 = b - \Omega_1$. Im Fall $\Omega_2 > b - \Omega_1$ ist der erste Mischer ein Aufwärtsmischer, der zweite ein Abwärtsmischer. Für $\Omega_2 < b - \Omega_1$ ist es umgekehrt. Beim Betrieb in Frequenzgleichlage haben die Schwingungskreise zwischen den Klemmen 2'' – 2'' die Resonanzkreisfrequenz $\Omega_2 = \Omega_1 + b$, wenn der erste Mischer als Aufwärtsmischer arbeitet, und die Resonanzkreisfrequenz $\Omega_2 = \Omega_1 - b$, wenn der erste Mischer als Abwärtsmischer be-

trieben wird. Die Bandbreiten der Parallelschwingungskreise der Schaltung in Bild 3 werden bei den nachfolgenden Betrachtungen als so klein vorausgesetzt, daß Frequenzen außerhalb ihrer Resonanzfrequenzen nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

4. Die Vierpolgleichungen und der Übertragungsgewinn des nichtreziproken Tunneldioden-Verstärkers bei Frequenzenkehr- und -gleichlage

4.1. Die Vierpolgleichungen bei Frequenzenkehrlage

Die Parallelschwingungskreise zwischen den Klemmen 2'' – 2'' in Bild 3 sind auf die Kreisfrequenz

$$\Omega_2 = b - \Omega_1 \quad (16)$$

abgestimmt. Die aktiven Elemente D_1 und D_2 sind Tunneldioden mit nichtlinearer I - U -Kennlinie, die im Flußgebiet betrieben werden.

Nach Gl. (14) erhalten wir mit den in Bild 3 gewählten Pfeilrichtungen für die Ströme und Spannungen die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{S_1^{(1)*}} \begin{pmatrix} \underline{G}'_{22} + S_1^{(0)} & 1 \\ (\underline{G}'_{22} + S_1^{(0)}) (\underline{G}'_{11} + S_1^{(0)}) - |S_1^{(1)}|^2 & \underline{G}'_{11} + S_1^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{pmatrix} \quad (17)$$

der Vierpolgleichungen des zwischen den Klemmen 1' – 1' und 2'' – 2'' liegenden ersten Mixers. Entsprechend finden wir die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = \frac{1}{S_2^{(1)}} \begin{pmatrix} \underline{G}''_{22} + S_2^{(0)} & 1 \\ (\underline{G}''_{22} + S_2^{(0)}) (\underline{G}''_{11} + S_2^{(0)}) - |S_2^{(1)}|^2 & \underline{G}''_{11} + S_2^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2' \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (18)$$

der Vierpolgleichungen des zweiten Mixers in Bild 3 zwischen den Klemmen 2'' – 2'' und 2' – 2'. Nach Multiplikation der Kettenmatrizen in den Gl. (17) und (18) für den ersten und zweiten Mischer erhalten wir mit den Abkürzungen

$$\underline{G}_{11} = \underline{G}'_{11} + S_1^{(0)}, \quad \underline{G}_{22} = \underline{G}''_{22} + S_2^{(0)}, \quad \underline{G}_H = \underline{G}'_{22} + S_1^{(0)} + \underline{G}''_{11} + S_2^{(0)} \quad (19), (20), (21)$$

die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{S_1^{(1)*} S_2^{(1)}} \begin{pmatrix} \underline{G}_H \underline{G}_{22} - |S_2^{(1)}|^2 & \underline{G}_H \\ \underline{G}_{11} \underline{G}_H \underline{G}_{22} - |S_2^{(1)}|^2 \underline{G}_{11} - |S_1^{(1)}|^2 \underline{G}_{22} & \underline{G}_{11} \underline{G}_H - |S_1^{(1)}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (22)$$

der Vierpolgleichungen der Miskerkette. Durch Umwandlung der Kettenform in Gl. (22) in die Leitwertform finden wir für die in Bild 4 gewählten Pfeilrichtungen die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ -I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} - \frac{|S_1^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} & -\frac{S_1^{(1)} S_2^{(1)*}}{\underline{G}_H} \\ -\frac{S_2^{(1)} S_1^{(1)*}}{\underline{G}_H} & \underline{G}_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (23)$$



Bild 4. Vierpol der Mischerkette aus Aufwärts- und Abwärtsmischer mit den Pfeilrichtungen der Ströme und Spannungen der Leitwertform.

der Vierpolgleichungen der Mischerkette.

Aus Gl. (23) geht hervor, daß die Zähler der Elemente in der Nebendiagonalen der Leitwertmatrix zueinander konjugiert komplex sind. Diese Tatsache können wir dazu ausnutzen, um mit Hilfe eines zusätzlichen linearen, passiven und reziproken Koppelnetzwerkes zwischen den Klemmen 1'-1' und 2'-2' in Bild 4 einen der beiden Leitwerte Y_{12} und Y_{21} , z. B. den Rückwirkungsleitwert Y_{12} , zum Verschwinden zu bringen. Die einfachste Art eines solchen Koppelnetzwerkes ist ein komplexer Leitwert Y , der zwischen die Klemmen 1'-1' und 2'-2' geschaltet wird. Wir erhalten dann die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} - \frac{|S_1^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} + Y & -\frac{S_1^{(1)} S_2^{(1)*}}{\underline{G}_H} - Y \\ -\frac{S_2^{(1)} S_1^{(1)*}}{\underline{G}_H} - Y & \underline{G}_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} + Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (24)$$

der Vierpolgleichungen für die rückgekoppelte Mischerkette zwischen den Klemmen 1-1 und 2-2 in Bild 5.

Der Rückwirkungsleitwert

$$Y_{12} = -\frac{S_1^{(1)} S_2^{(1)*}}{\underline{G}_H} - Y \quad (25)$$

verschwindet, wenn der Koppelleitwert Y den Wert

$$Y = -\frac{S_1^{(1)} S_2^{(1)*}}{\underline{G}_H} \quad (26)$$

hat.

Für Resonanzabstimmung der Parallelschwingungskreise zwischen den Klemmen 2''-2'' für die Hilfsfrequenz $b-s$ mit $s = \Omega_1$ geht die Gl. (26) in die Gleichung

$$Y = -\frac{S_1^{(1)} S_2^{(1)*}}{\underline{G}_H} \quad (27)$$

und mit $S_1^{(1)} = |S_1^{(1)}| e^{j\varphi_{b1}}$, $S_2^{(1)} = |S_2^{(1)}| e^{j\varphi_{b2}}$ in die Gleichung

$$Y = -\frac{|S_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{\underline{G}_H} e^{j(\varphi_{b1} - \varphi_{b2})} \quad (28)$$

über. Mit $\underline{G}_H$ ist der Realteil des Leitwertes $\underline{G}_H$ bezeichnet. Es ist einleuchtend und auch durch Rechnung beweisbar, daß der Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung am größten ist, wenn durch den Koppelleitwert Y am Eingang der Mischerkette keine zusätzlichen ohmschen Komponenten wirksam werden. Das ist dann der Fall, wenn die Betriebsspannungen U_{b1} und U_{b2} an den Dioden D_1 und D_2 um 90° gegeneinander phasenverschoben sind. Für $\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = -\pi/2$ kann damit nach Gl. (28) für Resonanz der Hilfskreise durch den kapazitiven Leitwert

$$Y = j \frac{|S_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{\underline{G}_H} \quad (29)$$

der Rückwirkungsleitwert Y_{12} zu Null gemacht und dadurch eine Entkopplung zwischen Signalaus- und -eingang erreicht werden.

Für Resonanzabstimmung der Hilfskreise zwischen den Klemmen 2''-2'' und mit Y nach Gl. (29) geht die Gl. (24) in die Gleichung

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} + j \frac{|S_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{\underline{G}_H} - \frac{|S_1^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} & 0 \\ -2j \frac{|S_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{\underline{G}_H} & \underline{G}_{22} + j \frac{|S_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{\underline{G}_H} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

über. Nach Resonanzabstimmung der Ein- und Ausgangskreise, d. h. für $s = \Omega_1$, erhalten wir aus Gl. (30) endlich die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} - \frac{|S_1^{(1)}|^2}{G_H} & 0 \\ -2j \frac{|S_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{G_H} & G_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{G_H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

der Vierpolgleichungen der nichtreziproken Tunneldioden-Mischerkette.

4.2. Der Übertragungsgewinn bei Frequenzenkehrlage

Der Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung

$$L_{\text{üv}} = \frac{|U_2|^2 G_L}{|I_1|^2 / 4G_S} = \frac{4G_S G_L |Y_{21}|^2}{|Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}|^2} \quad (32)$$

stellt definitionsgemäß das Verhältnis der an den Lastleitwert G_L zwischen den Klemmen 2-2 abgegebenen Wirkleistung zu der zwischen den Klemmen 1-1 aus dem Signalgenerator mit dem Quellenleitwert G_S und dem Kurzschlußstrom I_1 maximal entnehmbaren Signalwirkleistung dar.

Aus den Gl. (31) und (32) erhalten wir den Ausdruck

$$L_{\text{üv}} = \frac{16 G_S G_L |S_1^{(1)} S_2^{(1)}|^2}{G_H^2 \left(G_{11} - \frac{|S_1^{(1)}|^2}{G_H} \right)^2 \left(G_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{G_H} \right)^2} \quad (33)$$

für den Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung. Da der Quellenleitwert G_S bzw. der Lastleitwert G_L mit in den Leitwert Y_{11} bzw. Y_{22} einbezogen ist, gilt bei Leistungsanpassung am Ein- und Ausgang

$$2G_S = G_{11} - \frac{|S_1^{(1)}|^2}{G_H}, \quad 2G_L = G_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{G_H} \quad (34)$$

$$\text{mit} \quad G_{11} = G_S + G_{C1} + S_1^{(0)}, \quad G_H = G_{CH} + S_1^{(0)} + S_2^{(0)}, \quad G_{22} = G_L + G_{C2} + S_2^{(0)}. \quad (35)$$

Wenn die Kreisverlustleitwerte G_{C1} , G_{CH} und G_{C2} vernachlässigbar klein sind, so gehen die Bedingungengleichungen (34) und (35) für Leistungsanpassung in die Gleichungen

$$G_S = S_1^{(0)} - \frac{|S_1^{(1)}|^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}}, \quad G_L = S_2^{(0)} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}} \quad (36)$$

über.

Aus den Gl. (33), (35) und (36) erhalten wir den Ausdruck

$$L_{\text{üv}} = \frac{1}{\left[\left(\frac{S_1^{(0)}}{|S_1^{(1)}|} \right)^2 \left(1 + \frac{S_2^{(0)}}{S_1^{(0)}} \right) - 1 \right] \left[\left(\frac{S_2^{(0)}}{|S_2^{(1)}|} \right)^2 \left(1 + \frac{S_1^{(0)}}{S_2^{(0)}} \right) - 1 \right]} \quad (37)$$

für den Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung bei Leistungsanpassung am Ein- und Ausgang.

Wenn die beiden Dioden im Bereich positiven Anstieges der I - U -Kennlinie betrieben werden, dann bestehen im allgemeinen die Ungleichungen

$$S_1^{(0)} > |S_1^{(1)}|, \quad S_2^{(0)} > |S_2^{(1)}|,$$

und nach Gl. (37) ist $L_{\text{üv}} < 1$. Das entspricht dem Betriebsfall der klassischen Mischerdiode. Dagegen können Tunneldioden infolge ihrer Kennlinienform so betrieben werden, daß die Ungleichungen

$$|S_1^{(0)}| < |S_1^{(1)}|, \quad |S_2^{(0)}| < |S_2^{(1)}| \quad (38)$$

bestehen. Das ist dann der Fall, wenn die Arbeitspunkte der Dioden in der Nähe des Strommaximums der I - U -Kennlinie liegen. Wenn dabei die Arbeitspunkte im Bereich positiven Anstieges liegen, so ist nach Gl. (36) für

$$S_1^{(0)} > \frac{|S_1^{(1)}|^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}}, \quad S_2^{(0)} > \frac{|S_2^{(1)}|^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}} \quad (39)$$

Leistungsanpassung möglich. Aus Gl. (37) geht hervor, daß der Übertragungsgewinn in dem durch die Ungleichungen (38) und (39) abgegrenzten Bereich Werte größer als eins erreichen kann.

Der Übertragungsgewinn in Rückwärtsrichtung

$$L_{\text{ür}} = \frac{|U_1|^2 G_L}{|I_2|^2 / 4G_S} = \frac{4 G_S G_L |Y_{12}|^2}{|Y_{11} Y_{22} - Y_{12} Y_{21}|^2} \quad (40)$$

stellt definitionsgemäß das Verhältnis der an den gleichen Lastleitwert G_L an den Klemmen 1-1 abgegebenen Wirkleistung zu der an den Klemmen 2-2 dem gleichen Signalgenerator mit dem Quellenleitwert G_S und dem Kurzschlußstrom I_1 maximal entnehmbaren Signal-Wirkleistung dar.

Wenn der Koppelleitwert Y entsprechend Gl. (26) eingestellt wird, dann ist der Rückwirkungsleitwert Y_{12} der Schaltung in Bild 5 Null, so daß nach Gl. (40) auch der Übertragungsgewinn in Rückwärtsrichtung verschwindet.

4.3. Die Vierpolgleichungen und der Übertragungsgewinn bei Frequenzgleichlage

Die Frequenzgleichlage unterscheidet sich von dem eben behandelten Fall der Frequenzenkehrlage lediglich dadurch, daß der Hilfskreis statt auf die Differenzfrequenz $b - \Omega_1$ entweder auf die Frequenz $b + \Omega_1$ oder $\Omega_1 - b$ abgestimmt ist. Wir beschränken uns im folgenden auf den ersten Fall. Aus Gl. (14) folgt, daß die Rechnungen und Resultate für die Frequenzenkehrlage durch die Transformationen

$$b \rightarrow -b, \quad I_{b-s}^* \rightarrow I_{b+s}, \quad U_{b-s}^* \rightarrow U_{b+s}, \quad S^{(1)*} \rightarrow S^{(1)*}$$

und damit

$$\underline{G}_H^* \rightarrow \underline{G}_H \quad (41)$$

auf diesen Fall der Frequenzgleichlage übertragen werden können. Aus den Gl. (24) und (41) erhalten wir daher die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} - \frac{|S_1^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} + Y & -\frac{S_1^{(1)*} S_2^{(1)}}{\underline{G}_H} - Y \\ -\frac{S_2^{(1)*} S_1^{(1)}}{\underline{G}_H} - Y & \underline{G}_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} + Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (42)$$

für den Vierpol zwischen den Klemmen 1-1 und 2-2 in Bild 5 und aus den Gl. (26) und (41) die Bestimmungsgleichung

$$Y = -\frac{S_1^{(1)*} S_2^{(1)}}{\underline{G}_H} \quad (43)$$

für den Koppelleitwert Y , für den $Y_{12} = 0$ wird. Für Resonanzabstimmung der Hilfskreise geht die Gl. (43) in die Gleichung

$$Y = -\frac{S_1^{(1)*} S_2^{(1)}}{\underline{G}_H} = -\frac{|S_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{\underline{G}_H} e^{-j(\varphi_{b1} - \varphi_{b2})} \quad (44)$$

über. Der Wert von Y nach Gl. (44) ist konjugiert komplex zu dem entsprechenden Wert nach Gl. (28) bei Betrieb in Frequenzenkehrlage. Wenn man jetzt die Phasenwinkel der Oszillatorspannungen U_{b1} und U_{b2} so einstellt, daß $\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = \pi/2$ ist, dann kann durch denselben kapazitiven Leitwert

$$Y = j \frac{|S_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{\underline{G}_H} \quad (29)$$

wie bei Frequenzenkehrlage eine Entkopplung zwischen Signalaus- und -eingang erreicht werden. Die an die Gl. (29) anschließenden Überlegungen und Resultate sind daher für Frequenzgleich- und -kehrlage dieselben.

5. Die Vierpolgleichungen und der Übertragungsgewinn des nichtreziproken Reaktanzdioden-Verstärkers bei Frequenzenkehr- und -gleichlage

5.1. Die Vierpolgleichungen bei Frequenzenkehrlage

Die Parallelschwingungskreise zwischen den Klemmen 2''-2'' in Bild 3 sind wieder auf die Kreisfrequenz $\Omega_2 = b - \Omega_1$ abgestimmt. Als aktive Elemente D_1 und D_2 werden jedoch Halbleiterdioden verwendet, die gleichspannungsmäßig im Sperrgebiet betrieben werden. Die Wirkung der Dioden beruht in diesem Fall auf ihren nichtlinearen Ladungs-Spannungskennlinien $Q = Q(U)$ im Gegensatz zur Tunnel-diode mit nichtlinearer I - U -Kennlinie. Nach Gl. (15) erhalten wir mit den in Bild 3 gewählten Pfeilrichtungen für die Ströme und Spannungen die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1' \end{pmatrix} = \frac{j}{(b-s)C_1^{(1)*}} \begin{pmatrix} [\underline{G}_{22}' + j(b-s)C_1^{(0)*}]^* & 1 \\ [\underline{G}_{22}' + j(b-s)C_1^{(0)*}]^* (\underline{G}_{11}' + jsC_1^{(0)}) - s(b-s)|C_1^{(1)}|^2 & \underline{G}_{11}' + jsC_1^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{pmatrix} \quad (45)$$

der Vierpolgleichungen des zwischen den Klemmen 1'-1' und 2''-2'' liegenden ersten Mischers.

Entsprechend finden wir die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_2'' \\ I_2'' \end{pmatrix} = -\frac{j}{sC_2^{(1)}} \begin{pmatrix} \underline{G}_{22}'' + jsC_2^{(0)} & 1 \\ (\underline{G}_{22}'' + jsC_2^{(0)}) [\underline{G}_{11}'' + j(b-s)C_2^{(0)*}] - s(b-s)|C_2^{(1)}|^2 & [\underline{G}_{11}'' + j(b-s)C_2^{(0)*}]^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (46)$$

der Vierpolgleichungen des zweiten Mischers in Bild 3 zwischen den Klemmen 2''-2'' und 2'-2'.

Nach Multiplikation der Kettenmatrizen in den Gl. (45) und (46) für den ersten und zweiten Mischer erhalten wir mit den Abkürzungen

$$\underline{G}_{11} = \underline{G}'_{11} + j s C_1^{(0)}, \quad \underline{G}_{22} = \underline{G}'_{22} + j s C_2^{(0)}, \quad \underline{G}_H = \underline{G}'_{22} + j(b-s) C_1^{(0)} + \underline{G}'_{11} + j(b-s) C_2^{(0)} \quad (47), (48), (49)$$

die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1' \end{pmatrix} = \frac{1}{s(b-s) C_1^{(1)*} C_2^{(1)}} \begin{pmatrix} \underline{G}_H^* \underline{G}_{22} - s(b-s) |C_2^{(1)}|^2 & \underline{G}_H^* \\ \underline{G}_{11} \underline{G}_H^* \underline{G}_{22} - s(b-s) [\underline{G}_{11} |C_2^{(1)}|^2 + \underline{G}_{22} |C_1^{(1)}|^2] & \underline{G}_{11} \underline{G}_H^* - s(b-s) |C_1^{(1)}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (50)$$

der Vierpolgleichungen der Mischerkette.

Durch Umwandlung der Kettenform der Gl. (50) finden wir für die in Bild 4 gewählten Pfeilrichtungen die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ -I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} - \frac{s(b-s) |C_1^{(1)}|^2}{\underline{G}_H^*} & -\frac{s(b-s) C_1^{(1)} C_2^{(1)*}}{\underline{G}_H^*} \\ -\frac{s(b-s) C_2^{(1)} C_1^{(1)*}}{\underline{G}_H^*} & \underline{G}_{22} - \frac{s(b-s) |C_2^{(1)}|^2}{\underline{G}_H^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (51)$$

der Vierpolgleichungen der Reaktanzdioden-Mischerkette.

Aus Gl. (51) geht hervor, daß ebenso wie bei der Tunneliode die Zähler der Elemente in der Nebendiagonalen der Leitwertmatrix zueinander konjugiert komplex sind, vgl. hierzu Gl. (23). Es kann somit wieder durch einen zwischen die Ein- und Ausgangsklemmen der Mischerkette geschalteten komplexen Rückkopplungsleitwert Y vollständige Entkopplung in Rückwärtsrichtung erzielt werden. Für den Vierpol in Bild 5 zwischen den Klemmen 1'-1' und 2'-2' erhalten wir die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} - \frac{s(b-s) |C_1^{(1)}|^2}{\underline{G}_H^*} + Y & -\frac{s(b-s) C_1^{(1)} C_2^{(1)*}}{\underline{G}_H^*} - Y \\ -\frac{s(b-s) C_2^{(1)} C_1^{(1)*}}{\underline{G}_H^*} - Y & \underline{G}_{22} - \frac{s(b-s) |C_2^{(1)}|^2}{\underline{G}_H^*} + Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (52)$$

der Vierpolgleichungen. Wenn wir in Rückwärtsrichtung vollständige Entkopplung fordern, so muß nach Gl. (52)

$$Y_{12} = -\frac{s(b-s) C_1^{(1)} C_2^{(1)*}}{\underline{G}_H^*} - Y = 0$$

sein. Hieraus folgt die Bestimmungsgleichung

$$Y = -\frac{s(b-s) C_1^{(1)} C_2^{(1)*}}{\underline{G}_H^*} \quad (53)$$

für den Koppelleitwert Y des nichtreziproken Reaktanzdioden-Verstärkers in Frequenzenkehrlage.

Für Resonanzabstimmung der Hilfskreise und mit $C_1^{(1)} = |C_1^{(1)}| e^{j\varphi_{b1}}$, $C_2^{(1)} = |C_2^{(1)}| e^{j\varphi_{b2}}$ geht die Gl. (53) in die Gleichung

$$Y = -\frac{s(b-s) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|}{G_H} e^{j(\varphi_{b1} - \varphi_{b2})} \quad (54)$$

über. Für $\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = -\pi/2$ kann dann durch den kapazitiven Koppelleitwert

$$Y = j \frac{s(b-s) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|}{G_H} \quad (55)$$

eine vollständige Entkopplung zwischen dem Signalaus- und -eingang erreicht werden.

Nach Resonanzabstimmung auf der Ein- und Ausgangsseite erhalten wir aus den Gl. (52) und (55) die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} - \frac{\Omega_1(b-\Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} & 0 \\ -2j \frac{\Omega_1(b-\Omega_1) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|}{G_H} & G_{22} - \frac{\Omega_1(b-\Omega_1) |C_2^{(1)}|^2}{G_H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (56)$$

der Vierpolgleichungen des vollständig entkoppelten Reaktanzdioden-Verstärkers in Frequenzenkehrlage.

5.2. Der Übertragungsgewinn bei Frequenzenkehrlage

Nach Gl. (32) und mit den Vierpolkonstanten der Leitwertmatrix in Gl. (56) erhalten wir die Beziehung

$$L_{\text{üv}} = \frac{16 G_S G_L [\Omega_1(b - \Omega_1) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|^2]}{G_H^2 \left[G_{11} - \frac{\Omega_1(b - \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} \right]^2 \left[G_{22} - \frac{\Omega_1(b - \Omega_1) |C_2^{(1)}|^2}{G_H} \right]^2} \quad (57)$$

für den Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung des nichtreziproken Reaktanzdioden-Verstärkers bei Frequenzenkehrlage. Beim Reaktanzdioden-Verstärker gilt entsprechend Bild 3

$$G_{11} = G_S + G_{C1}, \quad G_H = G_{CH} = G'_{CH} + G''_{CH}, \quad G_{22} = G_L + G_{C2}. \quad (58)$$

Im Gegensatz zum Tunneldioden-Verstärker, bei dem in den Leitwerten G_{11} , G_H und G_{22} nach Gl. (35) die zeitlichen Mittelwerte $S_1^{(0)}$ und $S_2^{(0)}$ der nichtlinearen Elemente mit enthalten sind, können beim Reaktanzdioden-Verstärker die zeitlichen Mittelwerte $C_1^{(0)}$ und $C_2^{(0)}$ der nichtlinearen Elemente, die in den Gl. (47) bis (49) als imaginäre Summanden auftreten, weggelassen werden, so daß der Verstärker beim Betrieb in Frequenzenkehrlage bei Resonanz nach den Gl. (56) und (58) den Eingangsleitwert

$$G_E = G_{C1} - \frac{\Omega_1(b - \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_{CH}} = G_{C1} - G_{N1} \quad (59)$$

und den Ausgangsleitwert
$$G_A = G_{C2} - \frac{\Omega_1(b - \Omega_1) |C_2^{(1)}|^2}{G_{CH}} = G_{C2} - G_{N2} \quad (60)$$

hat. G_E und G_A sind im allgemeinen negativ, so daß keine Leistungsanpassung möglich ist.

Aus den Gl. (57) bis (60) folgt

$$L_{\text{üv}} = \frac{16 G_S G_L G_{N1} G_{N2}}{(G_S + G_{C1} - G_{N1})^2 (G_L + G_{C2} - G_{N2})^2} \quad (61)$$

für den Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung. Dieser kann beliebig große Werte annehmen.

Der Übertragungsgewinn in Rückwärtsrichtung hat nach Gl. (40) den Wert Null, wenn Y entsprechend Gl. (55) eingestellt wird.

5.3. Die Vierpolgleichungen bei Frequenzengleichlage

Diesen Fall des nichtreziproken Reaktanzdioden-Verstärkers in Frequenzengleichlage, der in [5] in ähnlicher Form behandelt wurde, erhalten wir für $\Omega_2 = b + \Omega_1$ aus dem im Abschnitt 5.2 behandelten Fall durch die Transformationen

$$b \rightarrow -b, \quad I_{b-s}^* \rightarrow I_{b+s}, \quad U_{b-s}^* \rightarrow U_{b+s}, \quad C^{(1)*} \rightarrow C^{(1)}, \quad G_H^* \rightarrow G_H,$$

wodurch die Gleichungen für die Frequenzenkehrlage in die entsprechenden für die Frequenzengleichlage übergehen. Wir finden so die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{G}_{11} + \frac{s(b+s) |C_1^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} + Y & \frac{s(b+s) C_1^{(1)*} C_2^{(1)}}{\underline{G}_H} - Y \\ \frac{s(b+s) C_2^{(1)*} C_1^{(1)}}{\underline{G}_H} - Y & \underline{G}_{22} + \frac{s(b+s) |C_2^{(1)}|^2}{\underline{G}_H} + Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (62)$$

der Vierpolgleichungen für den Vierpol zwischen den Klemmen 1-1 und 2-2 in Bild 5 und die Bestimmungsgleichung

$$Y = \frac{s(b+s) C_1^{(1)*} C_2^{(1)}}{\underline{G}_H} \quad (63)$$

für den Koppelleitwert Y .

Für Resonanzabstimmung der Hilfskreise auf die Summenfrequenz $b + \Omega_1$ und mit $C_1^{(1)} = |C_1^{(1)}| e^{j\varphi_{b1}}$, $C_2^{(1)} = |C_2^{(1)}| e^{j\varphi_{b2}}$ geht die Gl. (63) in die Gleichung

$$Y = \frac{s(b+s) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|}{G_H} e^{-j(\varphi_{b1} - \varphi_{b2})} \quad (64)$$

für den Koppelleitwert Y über.

Im Gegensatz zum Tunneldioden-Verstärker ist hier bei dem gleichen Phasenwinkel $\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = -\pi/2$ wie bei Frequenzenkehrlage durch den kapazitiven Leitwert

$$Y = j \frac{s(b+s) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|}{G_H} \quad (65)$$

eine vollständige Entkopplung zwischen Signalaus- und -eingang möglich. Nach Resonanzabstimmung auf der Ein- und Ausgangsseite und mit Y nach Gl. (65) erhalten wir die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} & 0 \\ -2j \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|}{G_H} & G_{22} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_2^{(1)}|^2}{G_H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (66)$$

der Vierpolgleichungen des vollständig entkoppelten Reaktanzdioden-Verstärkers in Frequenzgleichlage.

5.4. Der Übertragungsgewinn bei Frequenzgleichlage

Der Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung ist nach Gl. (32) und mit den Vierpolkonstanten der Leitwertmatrix in Gl. (66) durch die Beziehung

$$L_{\text{üv}} = \frac{16 G_S G_L [\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|]^2}{G_H^2 \left[G_{11} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} \right]^2 \left[G_{22} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_2^{(1)}|^2}{G_H} \right]^2} \quad (67)$$

gegeben. Da nach den Gl. (58) und (66) sowohl der Eingangsleitwert

$$G_E = G_{C1} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} \quad (68)$$

als auch der Ausgangsleitwert $G_A = G_{C2} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_2^{(1)}|^2}{G_H} \quad (69)$

positiv ist, kann beim Betrieb der Mischerkette in Frequenzgleichlage auf der Ein- und Ausgangsseite Leistungsanpassung eingestellt werden. Bei vernachlässigbaren ohmschen Verlusten im Ein- und Ausgangskreis gilt

$$G_{11} = G_S, \quad G_{22} = G_L,$$

und der Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung

$$L_{\text{üv}} = \frac{16 G_S G_L [\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)} C_2^{(1)}|]^2}{G_H^2 \left[G_S + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} \right]^2 \left[G_L + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_2^{(1)}|^2}{G_H} \right]^2} \quad (70)$$

erreicht bei Leistungsanpassung

$$G_S = \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H}, \quad G_L = \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_2^{(1)}|^2}{G_H} \quad (71)$$

seinen Maximalwert eins. Der vollständig entkoppelte Reaktanzdioden-Verstärker in Frequenzgleichlage wirkt dann als idealer Isolator, der in Vorwärtsrichtung mit $L_{\text{üv}} = 1$ verlustfrei überträgt und in Rückwärtsrichtung mit $L_{\text{üv}} = 0$ entkoppelt.

6. Die Vierpolgleichungen und der Übertragungsgewinn des nichtreziproken Verstärkers mit je einer Reaktanz- und Tunneliode bei Frequenzgleichlage

6.1. Die Vierpolgleichungen

Die in den Abschnitten 4 und 5 behandelten nichtreziproken Mischerketten erfordern zu ihrem Betrieb entweder zwei verschiedene Pumpgeneratoren oder einen Pumpgenerator und einen Phasenschieber. Im folgenden wird gezeigt, daß der zweite Pumpgenerator bzw. der Phasenschieber eingespart werden kann, wenn einer der beiden Mischer einen nichtlinearen reellen Leitwert, z. B. eine Tunneliode, und der andere einen nichtlinearen Blindleitwert, z. B. eine Reaktanzdiode, als aktives Element enthält. Wir wollen hier nur eine der vielen möglichen Ausführungsformen derartiger Mischerkombinationen beschreiben.

Als Beispiel wählen wir einen Verstärker, der in Frequenzgleichlage arbeitet. Dabei enthält der Aufwärtsmischer als aktives Element eine Reaktanzdiode, die von der Signalfrequenz s auf die Hilfsfrequenz $b + s$ mischt. Das aktive Element des Abwärtsmischers, der wieder auf die Signalfrequenz s zurückmischt, ist eine Tunneliode, deren Arbeitspunkt im Bereich zwischen Stromnullpunkt und -maximum liegt. Wir erhalten die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1' \end{pmatrix} = - \frac{j}{(b + s) C_1^{(1)}} \begin{pmatrix} G_{22}' + j(b + s) C_1^{(0)} & 1 \\ [G_{22}' + j(b + s) C_1^{(0)}] [G_{11}' + j s C_1^{(0)}] + s(b + s) |C_1^{(1)}|^2 & G_{11}' + j s C_1^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2' \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (72)$$

der Vierpolgleichungen des Reaktanzdioden-Aufwärtsmischers zwischen den Klemmen 1'-1' und 2''-2'' aus Gl. (45), wenn wir dort die Transformationen

durchführen.

Auf die gleiche Weise finden wir mit der Transformation $S_2^{(1)} \rightarrow S_2^{(1)*}$ aus Gl. (18) die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_2' \\ I_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{S_2^{(1)*}} \begin{pmatrix} G_{22}' + S_2^{(0)} & 1 \\ (G_{22}' + S_2^{(0)})(G_{11}' + S_2^{(0)}) - |S_2^{(1)}|^2 & G_{11}' + S_2^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (73)$$

der Vierpolgleichungen des Tunneldioden-Abwärtsmischers zwischen den Klemmen 2''-2'' und 2'-2'.

Nach Multiplikation der Kettenmatrizen in den Gl. (72) und (73) für den ersten und zweiten Mischer erhalten wir mit den Abkürzungen

$$G_{11} = G_{11}' + js C_1^{(0)}, \quad G_{22} = G_{22}' + S_2^{(0)}, \quad G_H = G_{22}' + j(b+s) C_1^{(0)} + G_{11}' + S_2^{(0)} \quad (74), (75), (76)$$

die Kettenform

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1' \end{pmatrix} = - \frac{j}{(b+s) C_1^{(1)} S_2^{(1)*}} \begin{pmatrix} G_H G_{22} - |S_2^{(1)}|^2 & G_H \\ G_{11} G_H G_{22} + s(b+s) |C_1^{(1)}|^2 G_{22} - |S_2^{(1)}|^2 G_{11} & G_{11} G_H + s(b+s) |C_1^{(1)}|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2' \end{pmatrix} \quad (77)$$

und daraus für die in Bild 4 gewählten Pfeilrichtungen die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1' \\ -I_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} + \frac{s(b+s) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} & -js \frac{C_1^{(1)*} S_2^{(1)}}{G_H} \\ -j(b+s) \frac{C_1^{(1)} S_2^{(1)*}}{G_H} & G_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{G_H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11}' & Y_{12}' \\ Y_{21}' & Y_{22}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (78)$$

der Vierpolgleichungen der Kettenschaltung aus einem Reaktanzdioden- und einem Tunneldioden-Mischer zwischen den Klemmen 1'-1' und 2'-2'. Im Gegensatz zu den in den Abschnitten 4 und 5 behandelten Miskerketten ist der durch die Gl. (78) beschriebene Vierpol nach Phase und Betrag nichtreziprok, denn es gilt

$$\frac{Y_{12}'}{Y_{21}'} = \frac{s}{b+s} \frac{C_1^{(1)*} S_2^{(1)}}{C_1^{(1)} S_2^{(1)*}}.$$

Durch einen zwischen die Ein- und Ausgangsklemmen der Miskerkette geschalteten komplexen Rückkopplungsleitwert Y kann auch hier eine Entkopplung in Rückwärtsrichtung erzielt werden. Für den Vierpol in Bild 5 zwischen den Klemmen 1-1 und 2-2 erhalten wir die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} + \frac{s(b+s) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} + Y & -js \frac{C_1^{(1)*} S_2^{(1)}}{G_H} - Y \\ -j(b+s) \frac{C_1^{(1)} S_2^{(1)*}}{G_H} - Y & G_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{G_H} + Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (79)$$

der Vierpolgleichungen. Wenn wir vollständige Entkopplung zwischen Aus- und Eingang fordern, so muß nach Gl. (79)

$$Y_{12} = -js \frac{C_1^{(1)*} S_2^{(1)}}{G_H} - Y = 0$$

sein. Hieraus folgt die Bestimmungsgleichung

$$Y = -js \frac{C_1^{(1)*} S_2^{(1)}}{G_H} \quad (80)$$

für den Koppelleitwert Y des nichtreziproken Reaktanzdiode-Tunneldiode-Verstärkers in Frequenzgleichlage. Für Resonanzabstimmung der Hilfskreise zwischen den Klemmen 2''-2'' in Bild 5 und mit $C_1^{(1)} = |C_1^{(1)}| e^{j\varphi_{b1}}$, $S_2^{(1)} = |S_2^{(1)}| e^{j\varphi_{b2}}$ geht die Gl. (80) in die Gleichung

$$Y = -js \frac{|C_1^{(1)}| |S_2^{(1)}|}{G_H} e^{-j(\varphi_{b1} - \varphi_{b2})} \quad (81)$$

über.

Wenn die an der Reaktanz- und Tunneldiode liegenden Betriebsspannungen gleichphasig sind, d. h. $\varphi_{b1} = \varphi_{b2}$, so ist nach Gl. (81) durch den induktiven Leitwert

$$Y = -j s \frac{|C_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{G_H} \quad (82)$$

eine vollständige Entkopplung zwischen Signalaus- und -eingang möglich. Ein zweiter Pumpgenerator oder ein Phasenschieber ist in diesem Fall nicht erforderlich. Nach Resonanzabstimmung auf der Ein- und Ausgangsseite und mit Y nach Gl. (82) erhalten wir die Leitwertform

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} & 0 \\ -j b \frac{|C_1^{(1)} S_2^{(1)}|}{G_H} & G_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{G_H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (83)$$

der Vierpolgleichungen des vollständig entkoppelten Reaktanzdiode-Tunneliode-Verstärkers in Frequenzgleichlage.

6.2. Der Übertragungsgewinn

Aus den Gl. (32) und (83) folgt der Ausdruck

$$L_{\text{üv}} = \frac{4 G_S G_L b^2 |C_1^{(1)} S_2^{(1)}|^2}{G_H^2 \left[G_{11} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} \right]^2 \left[G_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{G_H} \right]^2} \quad (84)$$

für den Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung. Bei Leistungsanpassung am Ein- und Ausgang gilt

$$2G_S = G_{11} + \frac{\Omega_1(b + \Omega_1) |C_1^{(1)}|^2}{G_H} \quad (85)$$

$$\text{und} \quad 2G_L = G_{22} - \frac{|S_2^{(1)}|^2}{G_H} \quad (86)$$

$$\text{mit} \quad G_{11} = G_S + G_{C1}, \quad G_H = G_{CH} + S_2^{(0)} = G'_{CH} + G''_{CH} + S_2^{(0)}, \quad G_{22} = G_{C2} + G_L + S_2^{(0)} \quad (87)$$

entsprechend den Gl. (74) bis (76). Wir erhalten aus den Gl. (84) bis (87) den Ausdruck

$$L_{\text{üv}} = \frac{(b/2)^2}{\left[\frac{G_{C1}(G_{CH} + S_2^{(0)})}{|C_1^{(1)}|^2} + \Omega_1(b + \Omega_1) \right] \left[\frac{(G_{C2} + S_2^{(0)})(G_{CH} + S_2^{(0)})}{|S_2^{(1)}|^2} - 1 \right]} \quad (88)$$

für den Übertragungsgewinn in Vorwärtsrichtung.

Wenn für den Betrag $|S_2^{(1)}|/S_2^{(0)}$ der relativen Steilheitsmodulation die Ungleichungen

$$\sqrt{\frac{\left(1 + \frac{G_{C2}}{S_2^{(0)}}\right) \left(1 + \frac{G_{CH}}{S_2^{(0)}}\right)}{1 + \frac{G_{C1}(G_{CH} + S_2^{(0)})}{|C_1^{(1)}|^2} + \Omega_1(b + \Omega_1)}} < \frac{|S_2^{(1)}|}{S_2^{(0)}} < \sqrt{\left(1 + \frac{G_{C2}}{S_2^{(0)}}\right) \left(1 + \frac{G_{CH}}{S_2^{(0)}}\right)} \quad (89)$$

gelten, dann sind die Werte von $L_{\text{üv}}$ nach Gl. (88) größer als eins. In dem durch die Ungleichungen (89) abgegrenzten Bereich wirkt die Reaktanzdiode-Tunneliode-Mischerkette als Verstärker.

Bei Vernachlässigung der ohmschen Verlustleitwerte G_{C1} , G'_{CH} , G''_{CH} und G_{C2} in den Schwingungskreisen geht die Gl. (88) in die Gleichung

$$L_{\text{üv}} = \frac{1}{4 \frac{\Omega_1}{b} \left(1 + \frac{\Omega_1}{b}\right) \left[\left(\frac{S_2^{(0)}}{|S_2^{(1)}|}\right)^2 - 1\right]} \quad (90)$$

und die Ungleichung (89) in die Ungleichung

$$\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{4 \frac{\Omega_1}{b} \left(1 + \frac{\Omega_1}{b}\right)}}} < \frac{|S_2^{(1)}|}{S_2^{(0)}} < 1 \quad (91)$$

über. Die Gl. (90) und die Ungleichung (91) sind vom Betrag $|C_1^{(1)}|$ der Kapazitätsmodulation unabhängig.

Tabelle I.

Verwendete nichtlineare Elemente	Betriebsart	Phasendifferenz $\varphi_{b1} - \varphi_{b2}$ der Pumpspannungen	Koppelleitwert Y für $Y_{12} = 0$	Einstellbereich Übertragungsgewinn	Eingangsleitwert	Ausgangsleitwert
zwei Tunnel-dioden	$\Omega_2 = b + \Omega_1$	$\pm \pi/2$	$\pm j \frac{ S_2^{(1)} S_1^{(1)} }{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}}$	$0 < L_{\bar{u}} < \infty$	$S_1^{(0)} - \frac{ S_1^{(1)} ^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}}$	$S_2^{(0)} - \frac{ S_2^{(1)} ^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}}$
	$\Omega_2 = b - \Omega_1$	$\pm \pi/2$	$\mp j \frac{ S_2^{(1)} S_1^{(1)} }{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}}$	$0 < L_{\bar{u}} < \infty$	$S_1^{(0)} - \frac{ S_1^{(1)} ^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}}$	$S_2^{(0)} - \frac{ S_2^{(1)} ^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}}$
zwei Reaktanz-dioden	$\Omega_2 = b + \Omega_1$	$\pm \pi/2$	$\mp j \frac{s(b+s) C_1^{(1)} C_2^{(1)} }{G_{CH}}$	$0 < L_{\bar{u}} \leq 1$	$+\frac{\Omega_1(b+\Omega_1) C_1^{(1)} ^2}{G_{CH}}$	$+\frac{\Omega_1(b+\Omega_1) C_2^{(1)} ^2}{G_{CH}}$
	$\Omega_2 = b - \Omega_1$	$\pm \pi/2$	$\mp j \frac{s(b+s) C_1^{(1)} C_2^{(1)} }{G_{CH}}$	$0 < L_{\bar{u}} < \infty$	$-\frac{\Omega_1(b-\Omega_1) C_1^{(1)} ^2}{G_{CH}}$	$-\frac{\Omega_1(b-\Omega_1) C_2^{(1)} ^2}{G_{CH}}$
1. Mischer mit Reaktanzdiode	$\Omega_2 = b + \Omega_1$	0 bzw. π	$\mp j s \frac{ C_1^{(1)} S_2^{(1)} }{S_2^{(0)}}$	$0 < L_{\bar{u}} < \infty$	$\frac{\Omega_1(b+\Omega_1) C_1^{(1)} ^2}{S_2^{(0)}}$	$S_2^{(0)} - \frac{ S_2^{(1)} ^2}{S_2^{(0)}}$
2. Mischer mit Tunnel-diode	$\Omega_2 = b - \Omega_1$	0 bzw. π	$\mp j s \frac{ C_1^{(1)} S_2^{(1)} }{S_2^{(0)}}$	$0 < L_{\bar{u}} < \infty$	$-\frac{\Omega_1(b-\Omega_1) C_1^{(1)} ^2}{S_2^{(0)}}$	$S_2^{(0)} - \frac{ S_2^{(1)} ^2}{S_2^{(0)}}$

7. Schlußbetrachtung

Die wichtigsten Eigenschaften der in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Mischerketten sind in der Tabelle I zusammengestellt. In den beiden ersten Zeilen der Tabelle sind die Resultate für die Schaltungen mit zwei Tunnel-dioden für Frequenzgleichlage und Frequenzenkehrlage aufgeführt. Wenn die Pumpspannungen U_{b1} und U_{b2} die Phasendifferenz $\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = \pi/2$ haben, dann ist bei Frequenzgleichlage zur Entkopplung der Schaltung ein kapazitiver Leitwert, bei der Phasendifferenz $\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = -\pi/2$ ein induktiver Leitwert erforderlich. Beim Betrieb der Schaltung in Frequenzenkehrlage ist es umgekehrt. Der Übertragungsgewinn $L_{\bar{u}v}$ kann bei Schaltungen mit zwei Tunnel-dioden entsprechend der Wahl der Amplitude der Pumpspannung jeden Wert in dem Bereich zwischen Null und unendlich annehmen. Leistungsanpassung am Ein- und Ausgang der Schaltung und $L_{\bar{u}v} > 1$ sind gleichzeitig möglich, wenn $S_1^{(0)}$ und $S_2^{(0)}$ in dem durch die Ungleichungen

$$\frac{|S_1^{(1)}|^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}} < S_1^{(0)} < |S_1^{(1)}|,$$
$$\frac{|S_2^{(1)}|^2}{S_1^{(0)} + S_2^{(0)}} < S_2^{(0)} < |S_2^{(1)}|$$

vorgegebenen Bereich liegen. Die Resultate für Schaltungen mit zwei Reaktanzdioden sind in den Zeilen 3 und 4 zusammengefaßt. Sowohl bei Frequenzgleichlage als auch bei Frequenzenkehrlage wird bei der Phasendifferenz $\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = \pi/2$ zur Entkopplung ein induktiver Leitwert und bei der Phasendifferenz $\varphi_{b1} - \varphi_{b2} = -\pi/2$ ein kapazitiver Leitwert benötigt. Bei Frequenzgleichlage liegt der Wert des Übertragungsgewinns $L_{\bar{u}v}$ im Bereich zwischen Null und eins. Da bei dieser Betriebsart

die Ein- und Ausgangsleitwerte positiv sind, ist am Ein- und Ausgang Leistungsanpassung möglich. Bei vernachlässigbaren Kreisverlusten nimmt $L_{\bar{u}v}$ dann seinen Maximalwert eins an. Diese Schaltung kann daher als Isolator verwendet werden.

Beim Betrieb in Frequenzenkehrlage dagegen können beliebige Werte für den Übertragungsgewinn $L_{\bar{u}v}$ erreicht werden. Da die Ein- und Ausgangsleitwerte negativ sind, ist jedoch keine Leistungsanpassung möglich.

In den Zeilen 5 und 6 der Tabelle I sind schließlich die Ergebnisse für die Schaltungen mit einer Reaktanzdiode im ersten Mischer und einer Tunnel-diode im zweiten Mischer zusammengestellt. Sowohl bei Frequenzgleichlage als auch bei Frequenzenkehrlage ist zur Entkopplung bei gleichphasigen Pumpspannungen ein induktiver Leitwert und bei gegenphasigen Pumpspannungen ein kapazitiver Leitwert notwendig. Der Übertragungsgewinn $L_{\bar{u}v}$ kann bei beiden Betriebsarten beliebige Werte erreichen, Leistungsanpassung am Ein- und Ausgang ist jedoch nur bei Frequenzgleichlage möglich. Bei Frequenzenkehrlage ist der Eingangsleitwert negativ, der Ausgangsleitwert kann durch Wahl des Arbeitspunktes der Tunnel-diode positiv gemacht werden.

Den Herren Dr. H. SEIDEL und Dr. M. UENOHARA von den Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, danken wir für wertvolle Diskussionen.

Schrifttum

[1] MAURER, R., LÖCHERER, K.-H. und BOMHARDT, K., Der Reaktanz-Geradeausverstärker als rauscharme Vorstufe im UHF-Gebiet. A.E.U. **13** [1959], 509–524.
[2] MAURER, R. und RIECK, H., Der Tunnel-dioden-Geradeausverstärker als rauscharme Vorstufe im UHF-Gebiet. A.E.U., in Vorbereitung.
[3] ENGELBRECHT, R. S., A low-noise nonlinear reactance traveling-wave amplifier. Proc. Inst. Radio Engrs. **46** [1958], 1655.
[4] PÖSCHL, K., Mathematische Methoden in der Hochfrequenztechnik. Springer-Verlag, Berlin 1956.
[5] KAMAL, A. K., A parametric device as a nonreciprocal element. Proc. Inst. Radio Engrs. **48** [1960], 1424–1430.

Zur Dimensionierung n -stufiger Leitungstransformatoren

VON HORST SCHREIBER

Mitteilung aus der Felten & Guillaume Fernmeldeanlagen G.m.b.H., Nürnberg

(A.E.Ü. 15 [1961], 84—90; eingegangen am 20. Oktober 1960)

DK 621.372.814:621.372.51

Dimensionierungsformeln für unkomensierte Stufentransformatoren, deren Breitbandigkeit allein durch eine entsprechend höhere Stufenzahl erreicht werden kann, werden abgeleitet. Zur Beurteilung solcher n -stufiger Leitungstransformatoren wird eine allgemeine Näherungsformel für den Eingangsreflexionsfaktor des mit dem anzupassenden Widerstand abgeschlossenen Transformators entwickelt, in der nur die auf den Eingang transponierten reellen Reflexionsfaktoren der $(n + 1)$ Stoßstellen auftreten. Aus dieser Näherung ergeben sich zunächst zwei spezielle Bemessungsmöglichkeiten: die binomische und die geometrische Dimensionierung. Sie werden hier so bezeichnet, weil die Näherungsformel für den Eingangsreflexionsfaktor die Form einer binomischen bzw. geometrischen Reihe annimmt. Für diese beiden Fälle wird der Betrag des Eingangsreflexionsfaktors in Abhängigkeit von der Stufenzahl, dem Transformationsverhältnis und dem Phasenmaß der gleichlangen Transformations-Leitungsstücke berechnet. Danach folgt die Ableitung der Bedingungen für eine allgemeine, in gewissen Grenzen frei wählbare Dimensionierung und der zugehörigen Näherungsformel für den Betrag des Eingangsreflexionsfaktors des Stufentransformators.

Die Gegenüberstellung der Dimensionierungsmöglichkeiten zeigt, daß die binomische und die geometrische Dimensionierung als spezielle Grenzfälle betrachtet werden können: die erste führt zu einem nicht welligen, die zweite für Stufenzahlen ≥ 3 zu einem ausgeprägt welligen Verlauf des Eingangsreflexionsfaktor-Betrages im Arbeitsbereich. Mit der allgemeinen Dimensionierung kann ein Optimum zwischen diesen Werten gesucht werden.

Die Ergebnisse werden mit einigen Dimensionierungsangaben für einfache Fälle verglichen, die in der Literatur zu finden sind.

The paper derives dimensioning formulas for uncompensated step transformers whose wideband performance can be only attained by a correspondingly higher number of steps. For the evaluation of such n -step line-type transformers, a general approximation formula is derived for the input reflection coefficient of the transformer terminated into the impedance to be matched; this formula contains only the real reflection coefficients of the $(n + 1)$ discontinuity points transformed to the input. This approximation gives rise to two special dimensioning possibilities as a first step, viz. the binomial and the geometric dimensioning. They are so termed, since the approximation formula for the input reflection coefficient takes the form of a binomial and geometric series, respectively. For these two cases the magnitude of the input reflection coefficient is calculated as a function of the number of steps, the transformation ratio, and the phase constant of the transforming line sections of equal length. Subsequently the conditions are derived for a general dimensioning which can be chosen freely within limits, and the associated approximation formula for the magnitude of the input reflection coefficient of the step transformer.

A comparison of the dimensioning possibilities shows that the binomial and the geometric dimensioning can be considered as special limiting cases; with the first method the resultant function of the magnitude of the input reflection coefficient shows no ripple within the working range of frequencies, whereas with the second method it displays a distinct ripple in the case of three and more steps. With the general dimensioning method, an optimum between these values can be looked for.

The results are compared with some dimensioning information for simple cases which can be found in the literature.

1. Aufgabenstellung

Die Anpassung eines (Abschluß-)Widerstandes an einen vorgegebenen Widerstandswert wird vor allem in der Sender- und Antennentechnik für einen relativ großen Frequenzbereich gefordert. Im UKW- und Mikrowellengebiet kommt den mit Leitungsstücken realisierbaren Anpassungstransformatoren besondere Bedeutung zu, deren Transformationswirkung sowohl durch einen stufenweise als auch stetig veränderlichen Wellenwiderstand zustande kommen kann, wobei die gewünschte Breitbandigkeit oftmals mit Hilfe zusätzlicher Kompensationsglieder erreicht werden muß.

Der folgende theoretische Beitrag beschränkt sich auf unkomensierte Stufentransformatoren mit homogenen Leitungsstücken, deren Breitbandcharakter nur durch eine höhere Stufenzahl erzielt wird.

Die gestellte Aufgabe und die zu ihrer Lösung notwendigen Voraussetzungen und Bezeichnungen lauten (vgl. Bild 1):

Zwei reelle Widerstände R_0 und R sollen durch Zwischenschalten eines n -stufigen Leitungstransformators reflexionsarm innerhalb eines gewissen Frequenzbereiches angepaßt werden.

Die Transformationsstücke bestehen aus homogenen, verlustlosen Leitungsstücken gleicher Länge l

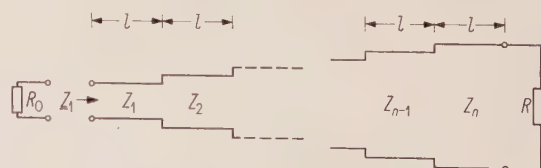


Bild 1. Prinzipaufbau des n -stufigen Leitungstransformators.

und sind durch ihren (reellen) Wellenwiderstand Z_k und ihr Übertragungsmaß $\underline{g} = j b$ gekennzeichnet.

Die Forderung nach Anpassung des reellen (Abschluß-)Widerstandes R an den reellen Widerstand R_0 (Bezugswert) gibt das Transformationsverhältnis t vor:

$$t = R/R_0. \quad (1)$$

Die Güte der Anpassung soll nach der Abweichung des Eingangsscheinwiderstandes Z_1 der mit R abgeschlossenen Transformationsanordnung vom (Bezugs-)Widerstand R_0 beurteilt werden, die sich durch den Eingangsreflexionsfaktor des Stufentransformators

$$\underline{p}_1 = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0} \quad (2)$$

ausdrücken läßt. Er hängt dann von der Stufenzahl n , dem Transformationsverhältnis t und dem Phasenmaß $b = \beta l$ ab.

Bei der (Bezugs-)Frequenz f_0 soll exakte Anpassung ($\underline{p}_1 = 0$) vorliegen. Hierfür soll $l = \lambda_0/4$ sein, so daß das Phasenmaß zu

$$b = 2\pi \frac{l}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \frac{f}{f_0} \quad (3)$$

normiert werden kann.

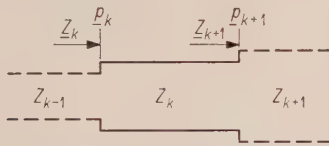


Bild 2. Einzelne Transformationsstufe.

Für die Dimensionierung des Wellenwiderstandes Z_k einer beliebigen Stufe (Bild 2) erweist es sich als zweckmäßig, Z_k auf R_0 zu normieren und als Potenzfunktion von t anzusetzen:

$$Z_k/R_0 = t^{a_k}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Darin ist a_k der im folgenden zu bestimmende Exponent der Dimensionierungsgleichung (4).

Die Forderung nach reflexionsarmer Anpassung innerhalb eines gewissen Frequenzbereiches hat zur Folge, daß dort kleine Beträge der Reflexionsfaktoren vorausgesetzt werden können.

2. Näherungsformel für den Eingangsreflexionsfaktor $\underline{p}_1$

Zunächst wird nach Bild 2 für eine einzelne (k -te) Transformationsstufe der Eingangsreflexionsfaktor dieser Stufe

$$\underline{p}_k = \frac{Z_k - Z_{k-1}}{Z_k + Z_{k-1}} \quad (5)$$

in Abhängigkeit von dem (reellen) Reflexionsfaktor der Stoßstelle

$$p_k = \frac{Z_k - Z_{k-1}}{Z_k + Z_{k-1}} = \frac{t^{a_k} - t^{a_{k-1}}}{t^{a_k} + t^{a_{k-1}}} \quad (6)$$

und dem Ausgangsreflexionsfaktor der Stufe (oder Eingangsreflexionsfaktor der folgenden Stufe)

$$\underline{p}_{k+1} = \frac{Z_{k+1} - Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} \quad (7)$$

ermittelt. Wie im Anhang A.1 abgeleitet wird, besteht zwischen diesen Reflexionsfaktoren die Beziehung

$$\underline{p}_k = \frac{p_k + \underline{p}_{k+1} e^{-j2b}}{1 + p_k \underline{p}_{k+1} e^{-j2b}}. \quad (8)$$

Diese Gleichung könnte nun verwendet werden, um durch schrittweise n -malige Rekursion zum Eingangsreflexionsfaktor $\underline{p}_1$ des n -stufigen Transformators zu gelangen. Mit Formel (8) jedoch wäre diese Aufgabe schwer lösbar und das Ergebnis wenig übersichtlich. Andererseits ist der Aufwand einer exakten Rekursion gar nicht notwendig, weil es sich infolge der schrittweisen Transformation um kleine, wenn nicht sehr kleine Beträge der Reflexionsfaktoren handelt. Der weiteren Berechnung wird deshalb die Näherungsformel

$$\underline{p}_k \approx p_k + \underline{p}_{k+1} e^{-j2b} \quad (9)$$

zugrunde gelegt.

Weiterhin gilt insbesondere für den Abschlußreflexionsfaktor der n -ten Stufe

$$\underline{p}_{n+1} = \frac{R - Z_n}{R + Z_n} = \frac{t - t^{a_n}}{t + t^{a_n}} = p_{n+1} \quad (10)$$

— er ist also gleich dem Reflexionsfaktor der $(n+1)$ -ten Stoßstelle — sowie für den Reflexionsfaktor der 1. Stoßstelle

$$p_1 = \frac{Z_1 - R_0}{Z_1 + R_0} = \frac{t^{a_1} - 1}{t^{a_1} + 1}. \quad (11)$$

Wie ein Vergleich der Gl. (6) und (10) oder (11) zeigt, ist also speziell $a_0 \equiv 0$ bzw. $a_{n+1} \equiv 1$.

Aus diesen Überlegungen ergibt die Rekursionsentwicklung der Gl. (9) für $k = n, (n-1), \dots, 1$, wenn außerdem zur Abkürzung $e^{-j2b} = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$\underline{p}_n \approx p_n + \underline{p}_{n+1} \varepsilon = p_n + p_{n+1} \varepsilon$$

$$\begin{aligned} \underline{p}_{n-1} &\approx p_{n-1} + \underline{p}_n \varepsilon \approx p_{n-1} + p_n \varepsilon + p_{n+1} \varepsilon^2 \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

und schließlich

$$\underline{p}_1 \approx p_1 + p_2 \varepsilon + p_3 \varepsilon^2 + \dots + p_{n+1} \varepsilon^n. \quad (12)$$

Die Gl. (12) stellt die allgemeine Näherungsformel für den Eingangsreflexionsfaktor der n -stufigen Transformationsanordnung dar; sie gilt für kleine p_k -Werte. Eine überschlägige Fehlerabschätzung ergibt, daß ihr relativer Fehler kleiner oder höchstens gleich p_1^2 ist.

3. Dimensionierung der Wellenwiderstände Z_k

Bevor auf die allgemeine Dimensionierungsmöglichkeit für die Wellenwiderstände eingegangen wird, sollen zunächst zwei spezielle Möglichkeiten zur Dimensionierung von Z_k vorangestellt werden, die sich aus der Form der Gl. (12) unmittelbar anbieten; man kann ihre rechte Seite entweder als binomische oder als geometrische Reihe auffassen.

3.1. Binomische Dimensionierung

Die Näherungsformel (12) für $\underline{p}_1$ stellt in der Form

$$\underline{p}_1 \approx p_1 \left(1 + \frac{p_2}{p_1} \varepsilon + \frac{p_3}{p_1} \varepsilon^2 + \dots + \frac{p_{n+1}}{p_1} \varepsilon^n \right)$$

eine binomische Reihe dar, wenn die Quotienten p_k/p_1 gleich den entsprechenden Binomialkoeffizienten gesetzt werden:

$$\frac{p_k}{p_1} = \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+2)}{(k-1)!}; \quad (13)$$

$$k = 1, 2, \dots, (n+1).$$

Mit der Summenformel für die binomische Reihe erhält man dann für den Eingangsreflexionsfaktor

$$\underline{p}_1 = p_1 (1 + \varepsilon)^n$$

oder, wenn $\varepsilon = e^{-j2b}$ wieder eingeführt und der Zusammenhang zwischen den Kreis- und Exponentialfunktionen beachtet wird,

$$\underline{p}_1 = p_1 2^n \cos^n b e^{-jnb}. \quad (14)$$

Diese Gleichung erfüllt für jedes n die anfangs gemachte Voraussetzung, daß bei der Bezugsfrequenz f_0 ($b = \pi/2$) auch $\underline{p}_1 = 0$ sein soll.

Mit einer weiteren Näherung für den Reflexionsfaktor p_k der Stoßstellen (vgl. Anhang A.2)

$$p_k \approx \frac{\ln t}{2} (a_k - a_{k-1}) \quad (15)$$

bzw. für $k = 1$

$$p_1 \approx \frac{\ln t}{2} a_1 \quad (16)$$

geht die Bestimmungsgleichung (13) über in

$$\binom{n}{k-1} \approx \frac{a_k - a_{k-1}}{a_1}; \quad k = 1, 2, \dots, (n+1). \quad (17)$$

Daraus kann, wie es im Anhang A.2 durchgeführt ist, der allgemeine Exponent a_k ermittelt werden; das Ergebnis ist

$$a_k \approx \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^k \binom{n}{i-1}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Gl. (18) stellt eine spezielle Näherungslösung für den Exponenten a_k in der Dimensionierungsgleichung (4) für den Wellenwiderstand der Transformationsstufen dar. Für die Stufenzahlen $n = 1, \dots, 5$ sind in der Tabelle I die Exponenten a_k aufgeführt.

Der hiernach dimensionierte n -stufige Leitungstransformator hat einen Eingangsreflexionsfaktor, dessen Betrag sich aus Gl. (14), (16) und (18) zu

Tabelle I. a_k -Werte der binomischen Dimensionierung für $n = 1, \dots, 5$.

$n \backslash a_k$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	0,5	—	—	—	—
2	0,25	0,75	—	—	—
3	0,125	0,5	0,875	—	—
4	0,0625	0,3125	0,6875	0,9375	—
5	0,0313	0,1875	0,5	0,8125	0,9687

$$|\underline{p}_1| \approx \frac{\ln t}{2} |\cos^n b| \quad (19)$$

ergibt.

3.2. Geometrische Dimensionierung

Man geht — mit Ausnahme der 1. und der letzten, $(n+1)$ -ten Stoßstelle — von gleichen Reflexionsfaktoren der Stoßstellen aus:

$$p_2 = p_3 = \dots = p_n.$$

Wie leicht nachzuprüfen ist, bedeutet das

$$\frac{Z_k}{Z_{k-1}} = \frac{Z_{k+1}}{Z_k} \quad \text{bzw.} \quad Z_k = \sqrt{Z_{k-1} Z_{k+1}}$$

oder auch

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}. \quad (20)$$

Es ist also — mit Ausnahme von Z_1 und Z_n — jeder Wellenwiderstand gleich dem geometrischen Mittel aus den beiden benachbarten Wellenwiderständen. Da dies jedoch für Z_1 und Z_n nicht zutreffen kann, soll für die Reflexionsfaktoren der ersten und der letzten Stoßstelle getrennt

$$p_1 = p_{n+1} (\neq p_n), \quad \text{d. h.} \quad \frac{Z_1}{R_0} = \frac{R}{Z_n},$$

$$\text{oder auch} \quad a_1 = 1 - a_n \quad (21)$$

angesetzt werden.

Mit diesen Festlegungen kann die allgemeine Näherungsformel (12) für den Eingangsreflexionsfaktor $\underline{p}_1$ auf die Form

$$\underline{p}_1 \approx p_1 (1 + \varepsilon^n) + p_n (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1}) - p_n$$

gebracht werden oder, wenn für die darin enthaltene geometrische Reihe die Summenformel verwendet wird, auf die Form

$$\underline{p}_1 \approx p_1 (1 + \varepsilon^n) + p_n \frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} - p_n. \quad (22)$$

Um schließlich noch die anfangs getroffene Voraussetzung — $\underline{p}_1 = 0$ bei f_0 — zu erfüllen, muß weiterhin (vgl. Anhang A.3)

$$p_n = 2 p_1$$

oder auch, die Näherungen (15) und (16) verwendend,

$$a_n - a_{n-1} \approx 2 a_1 \quad (23)$$

gesetzt werden.

Die hier festgelegten Bedingungen (20), (21) und (23) führen — wie im Anhang A.3 gezeigt wird — auf die Lösung

$$a_k \approx \frac{2k-1}{2n}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Tabelle II. a_k -Werte der geometrischen Dimensionierung für $n = 1, \dots, 5$.

$n \backslash a_k$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
1	0,5	—	—	—	—
2	0,25	0,75	—	—	—
3	0,167	0,5	0,833	—	—
4	0,125	0,375	0,625	0,875	—
5	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9

Diese Gl. (24) stellt somit eine weitere spezielle Näherungsformel für den Exponenten a_k in der Dimensionierungsgleichung (4) dar. In der Tabelle II sind die a_k -Werte für $n = 1, \dots, 5$ aufgeführt.

Für den Betrag des Eingangsreflexionsfaktors p_1 des hiernach dimensionierten n -stufigen Leitungstransformators ist

$$|p_1| \approx \frac{\ln t}{2} \frac{1}{n} |\cot b| |\sin nb|. \quad (25)$$

Diese Näherungsformel ergibt sich aus Gl. (22) unter Verwendung des Zusammenhangs zwischen den Kreis- und Exponentialfunktionen (vgl. Anhang A.3).

3.3. Allgemeine Dimensionierung

Um die Dimensionierung der Wellenwiderstände Z_k zu verallgemeinern, wird von der Näherungsformel (12) ausgegangen, die sich in der Form einer endlichen Summe

$$p_1 \approx \sum_{k=1}^{n+1} p_k \varepsilon^{k-1}. \quad (12)$$

schreiben läßt. Führt man darin noch die Näherung (15) für den Stoßstellenreflexionsfaktor p_k ein, so ist

$$p_1 \approx \frac{\ln t}{2} \sum_{k=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1}) \varepsilon^{k-1}. \quad (26)$$

Im Arbeitsbereich, in dem nur geringe Reflexionen auftreten sollen, können je nach Dimensionierung mehrere Nullstellen auftreten. Auf jeden Fall aber wird bei der Frequenz f_0 exakte Anpassung vorausgesetzt. Dies ist offenbar erfüllt, wenn

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} (a_k - a_{k-1}) = 0 \quad (27)$$

ist. Durch entsprechende Auswertung dieser Gleichung (vgl. Anhang A.4) kommt man zu den allgemeinen Bedingungen für die Exponenten a_k in der Dimensionierungsgleichung (4):

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k = \pm \frac{1}{2} \begin{cases} + \text{ für gerade } n, \\ - \text{ für ungerade } n, \end{cases} \quad (28)$$

$$0 < a_1 < \dots < a_n < 1. \quad (29)$$

Die a_k -Werte können somit in gewissen Grenzen frei gewählt werden; dem Prinzip der schrittweisen Transformation jedoch entsprechend müssen sie der Ungleichung (29) gehorchen, und die Summe ihrer alternierenden Reihenfolge muß außerdem nach Gl. (28) $+1/2$ bei geradzahlgiger Stufenzahl bzw. $-1/2$ bei ungeradzahlgiger Stufenzahl sein.

Gemäß Gl. (12) ist für den Betrag des Eingangsreflexionsfaktors p_1 , wenn $\varepsilon = e^{-j2b}$ wieder eingesetzt wird,

$$|p_1| \approx \quad (30)$$

$$\sqrt{\left[\sum_{k=1}^{n+1} p_k \cos 2(k-1)b \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{n+1} p_k \sin 2(k-1)b \right]^2}$$

anzusetzen. Diese Gleichung läßt sich schließlich unter Verwendung der Näherung (15) für den allgemeinen Reflexionsfaktor p_k der Stoßstellen umrechnen in (vgl. Anhang A.4)

$$|p_1| \approx \quad (31)$$

$$\frac{\ln t}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1}) (a_i - a_{i-1}) \cos 2(k-i)b}$$

mit $a_0 \equiv 0$ und $a_{n+1} \equiv 1$.

Mit dieser Näherungsformel (31) ist für den Fall einer allgemeinen Dimensionierung auch der Betrag des Eingangsreflexionsfaktors p_1 des n -stufigen Transformators berechenbar.

4. Diskussion der Ergebnisse

Vergleicht man zunächst die Tabellenwerte der beiden speziellen Dimensionierungen miteinander, so überrascht die Tatsache, daß die binomische und die geometrische Dimensionierung sowohl für $n = 1$ als auch für $n = 2$ zu den gleichen a_k -Werten führen. Außerdem stimmen sie mit den für diese beiden einfachsten Fälle bereits seit längerem bekannten Dimensionierungsvorschriften [1] genau überein. Dann müssen natürlich auch die Formeln der zugehörigen Reflexionsfaktoren für $n = 1$ und 2 gleich sein; dies kann durch Umrechnen von Gl. (25) leicht nachgeprüft werden. Für diese beiden Stufenzahlen gibt es also jeweils nur eine optimale Dimensionierung:

$$n = 1; \quad a_1 = 0,5, \quad (Z_1 = \sqrt{t} R_0):$$

$$|p_1| \approx \frac{\ln t}{2} |\cos b|;$$

$$n = 2; \quad a_1 = 0,25, \quad (Z_1 = \sqrt[4]{t} R_0),$$

$$a_2 = 0,75, \quad (Z_2 = \sqrt[4]{t^3} R_0):$$

$$|p_1| \approx \frac{\ln t}{2} \cos^2 b.$$

Der Verlauf der beiden (normierten) Reflexionsfaktorbeträge in Bild 3a zeigt, daß mit einer einzigen Transformationsstufe praktisch nur eine „selektive“ Anpassung möglich ist, und daß erst einem zweistufigen Transformator eine gewisse Breitbandqualität zugesprochen werden kann.

Geht man über zwei Transformationsstufen hinaus, dann beginnen binomische und geometrische Dimensionierung sich zu unterscheiden. Bild 3b–d läßt nicht nur erkennen, daß mit wachsender Stufenzahl die Breitbandigkeit des Transformators größer wird, es zeigt auch einen grundsätzlichen Unterschied zwischen den Reflexionsfaktorkurven beider Bemessungsarten. Im Fall der binomischen Dimensionierung steigt $|p_1|$ beiderseitig vom Anpassungspunkt f_0 monoton an, während es bei geometrischer Dimensionierung einen ausgeprägt welligen Verlauf mit relativen Maxima und noch Nullstellen neben der Resonanzstelle f_0 aufweist, wodurch sich auch eine etwas größere Bandbreite als im ersten Fall ergibt. Die Nullstellen — außer der

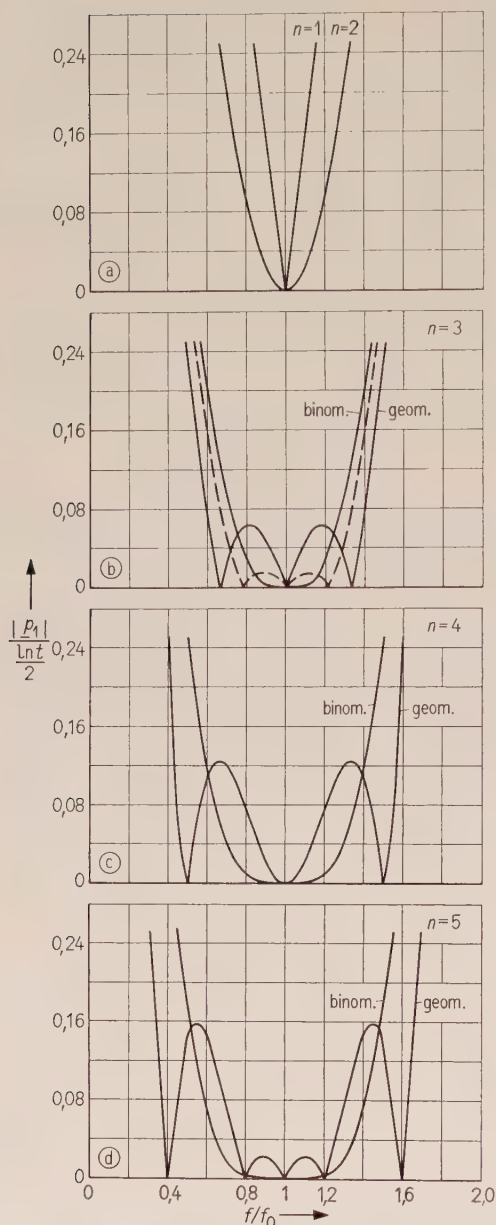


Bild 3. Reflexionsfaktor-Verlauf (normiert) (a) für $n = 1$ und 2, (b) für $n = 3$, (c) für $n = 4$ und (d) für $n = 5$.

für Resonanzanpassung bei f_0 ($b = \pi/2$) — liegen im Arbeitsbereich bei

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{z\pi}{n} \\ \text{bzw. } \frac{f}{f_0} &= \frac{2z}{n} \end{aligned} \right\} z = 1, 2, \dots, (n-1). \quad (32)$$

Die a_k -Werte sowohl der binomischen als auch der geometrischen Dimensionierung erfüllen die Bedingungen (28) und (29) der allgemeinen Dimensionierung. Es liegt deshalb nahe, die beiden speziellen Bemessungsarten als Grenzfälle zu betrachten und — falls erforderlich — eine optimale Dimensionierung zwischen diesen Werten zu suchen. Diese muß ebenfalls die Bedingungen (28) und (29) erfüllen; ihr

$|p_1|$ -Verlauf weist dann noch eine größere Bandbreite als bei der binomischen Dimensionierung auf, ist andererseits aber weniger wellig als bei der geometrischen Dimensionierung.

Als Beispiel hierfür ist der von WEISSFLOCH [2] vorgeschlagene dreistufige Transformator zu nennen, für den MEINKE [1] folgende Zahlenwerte angibt:

$$\begin{aligned} n &= 3; & a_1 &= 0,14, & (Z_1 &= t^{0,14} R_0), \\ & & a_2 &= 0,5, & (Z_2 &= \sqrt{t} R_0), \\ & & a_3 &= 0,86, & (Z_3 &= t^{0,86} R_0). \end{aligned}$$

Auch von RUHRMANN [3], der nach einer anderen Methode verfährt, wurden für $n = 3$ fast die gleichen Werte gefunden.

Der Reflexionsfaktorbetrag für diese Dimensionierung, die genau die hier abgeleiteten allgemeinen Bedingungen (28) und (29) erfüllt, berechnet sich nach Gl. (31) zu

$$|p_1| \approx \frac{\ln t}{2} \left| \frac{\cos b (3 - 28 \cos^2 b)}{25} \right|.$$

Sein Verlauf ist (normiert) in Bild 3 b gestrichelt eingezeichnet und bestätigt gut das vorher Gesagte.

Um die Genauigkeit der nach den Näherungsformeln berechneten Werte etwas abzuschätzen, soll ein Vergleich mit den Werten vorgenommen werden, für die DÄLLENBACH [4] ohne Näherungen noch bis $n = 4$ Dimensionierungsgleichungen aufstellen konnte. Danach ergeben sich für einen dreistufigen Transformator — umgerechnet auf den hier verwendeten Dimensionierungsansatz (4) — im Intervall $1 < t < 20$ Werte für a_1 zwischen 0,1251 und 0,1288. Verglichen mit dem entsprechenden Wert $a_1 = 0,125$ der binomischen Dimensionierung heißt das, es ist für $n = 3$ der relative Fehler dieses Näherungswertes

$$\frac{\Delta a_1}{a_1} \leq 3\% \quad \text{für } t \leq 20.$$

Dasselbe auch für $n = 4$ durchgeführt, ergibt einen relativen Fehler

$$\frac{\Delta a_1}{a_1} \leq 6\% \quad \text{für } t \leq 20.$$

Schließlich kann durch Vergleich noch festgestellt werden, daß die hier beschriebene geometrische Dimensionierung die genaue explizite Lösung der in [4] beschriebenen „Anordnung für kleinsten Ballast an schwingender Feldenergie“ für $n = 3$ und 4 ist.

Allgemeine (implizite) Dimensionierungsformeln für beliebiges n sind weiterhin von BURKHARDT-MATIER [5] bekannt, der auch noch die zulässige Fehlanpassung der relativen Maxima von $|p_1|$ im Arbeitsbereich in die Rechnung einbezieht. Aber auch dort ergeben sich nur bis $n = 3$ einfache allgemeine Lösungen (die ebenfalls von den hier gebrachten Ergebnissen gut befriedigt werden); für größere Stufenzahlen läuft die Lösung der dann komplizierteren Bemessungsgleichungen zwangsläufig auf ein Näherungsverfahren hinaus.

Herrn Dr. G. MARTIN danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für fördernde Diskussionen.

Anhang

A.1. Ableitung des Eingangsreflexionsfaktors $\underline{p}_k$ einer Stufe

Die Darstellung von Vierpolen durch die Streumatrix [6], [7]

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

gestattet die Berechnung des Eingangsreflexions-

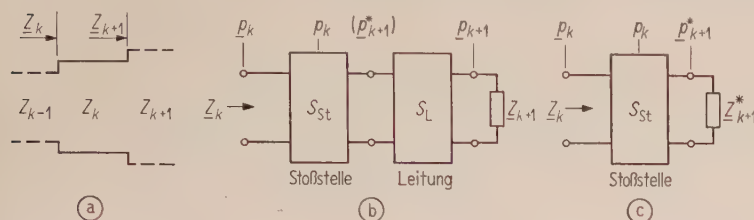


Bild 4. Zur Ableitung des Eingangsreflexionsfaktors $\underline{p}_k$ einer einzelnen Stufe.

faktors einer Stufe bei gegebenem Ausgangsreflexionsfaktor über die Matrizen- und Elemente. Die gedankliche Entwicklung deutet Bild 4 an. Zunächst wird der Ausgangsreflexionsfaktor $\underline{p}_{k+1}$ durch den homogenen Leitungsvierpol (Wellenwiderstand Z_k) mit der Streumatrix

$$S_L = \begin{pmatrix} 0 & e^{-j2b} \\ e^{-j2b} & 0 \end{pmatrix}$$

in $\underline{p}_{k+1}^* = S_{12} S_{21} \underline{p}_{k+1} = \underline{p}_{k+1} e^{-j2b}$
(Fehlersatz der Vierpoltheorie)

transponiert. $\underline{p}_{k+1}^*$ tritt nunmehr als Abschlußreflexionsfaktor des Stoßstellenvierpols auf, der die Streumatrix

$$S_{St} = \begin{pmatrix} \frac{Z_k - Z_{k-1}}{Z_k + Z_{k-1}} & \frac{2\sqrt{Z_k Z_{k-1}}}{Z_k + Z_{k-1}} \\ \frac{2\sqrt{Z_k Z_{k-1}}}{Z_k + Z_{k-1}} & \frac{Z_k - Z_{k-1}}{Z_k + Z_{k-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k & \sqrt{1 - p_k^2} \\ \sqrt{1 - p_k^2} & -p_k \end{pmatrix}$$

hat. Den Eingangsreflexionsfaktor der Stufe erhält man aus

$$\underline{p}_k = \frac{S_{11} - \Delta \underline{p}_{k+1}^*}{1 - S_{22} \underline{p}_{k+1}^*}$$

mit der Determinante der Streumatrix

$$\Delta = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21}.$$

Mit den Elementen der oben angeführten S_{St} -Matrix, für die $\Delta = -1$ ist, und mit $\underline{p}_{k+1}^*$ ergibt sich schließlich für den Eingangsreflexionsfaktor einer einzelnen Stufe

$$\underline{p}_k = \frac{p_k + \underline{p}_{k+1} e^{-j2b}}{1 + p_k \underline{p}_{k+1} e^{-j2b}}. \quad (8)$$

A.2. Zur Ableitung der binomischen Dimensionierung

Die Näherung des Reflexionsfaktors p_k einer Stoßstelle erfolgt über die Schreibweise als Hyperbelfunktion. Damit kann für die Gl. (6)

$$p_k = \frac{t^{a_k} - t^{a_{k-1}}}{t^{a_k} + t^{a_{k-1}}} = \tanh\left(\frac{a_k - a_{k-1}}{2} \ln t\right) \quad (6)$$

geschrieben werden. Die tanh-Funktion läßt sich für kleine Argumente — und um solche handelt es sich hier — durch ihr Argument selbst annähern:

$$p_k \approx \frac{\ln t}{2} (a_k - a_{k-1}) \quad (15)$$

bzw. für $k = 1$

$$p_1 \approx \frac{\ln t}{2} a_1. \quad (16)$$

Diese Näherung gilt ganz allgemein für alle behandelten Dimensionierungswege. Ihr relativer Fehler ist

$$\left| \frac{\Delta p_k}{p_k} \right| \leq 3\% \quad \text{für} \quad \frac{\ln t}{2} (a_k - a_{k-1}) \leq 0,3.$$

Er wird um so geringer, je mehr $t \rightarrow 1$ geht, aber auch je größer n ist, da dann $a_k - a_{k-1} \ll 1$ wird.

Um aus der Näherungsbeziehung

$$\binom{n}{k-1} = \frac{p_k}{p_1} \approx \frac{a_k - a_{k-1}}{a_1}; \quad (17)$$

$$k = 1, 2, \dots, (n+1)$$

den Exponenten a_k zu ermitteln, bildet man von den Binominalkoeffizienten einmal die Summe von $1, \dots, k$ und zum anderen die Summe von $1, \dots, (n+1)$:

$$\sum_{i=1}^k \binom{n}{i-1} = 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k-1} \approx \frac{1}{a_1} [(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_k - a_{k-1})] = \frac{a_k}{a_1},$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} = 1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \approx \frac{1}{a_1} [(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_{n+1} - a_n)] = \frac{a_{n+1}}{a_1}.$$

Da, wie bereits erwähnt, $a_0 \equiv 0$ und $a_{n+1} \equiv 1$ ist, folgt aus der zweiten Summierung

$$a_1 \approx \frac{1}{2^n}.$$

Damit erhält man aus der ersten Summierung

$$a_k \approx \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^k \binom{n}{i-1}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

A.3. Zur Ableitung der geometrischen Dimensionierung

Die für die geometrische Dimensionierung zugeschnittene Näherungsgleichung des Eingangsreflexionsfaktors

$$\underline{p}_1 \approx p_1(1 + \varepsilon^n) + p_n \frac{1 - \varepsilon^n}{1 - \varepsilon} - p_n \quad (22)$$

soll ebenfalls die anfangs getroffene Voraussetzung $\underline{p}_1 = 0$ bei der Bezugsfrequenz f_0 — für jedes n erfüllen. Beachtet man, daß bei der Frequenz f_0 ($b = \pi/2$) $\varepsilon^n = e^{-j\pi n} = (-1)^n$

wird, so ist aus Gl. (22) zu ersehen, daß zwar für ungerade n stets $\underline{p}_1 = 0$ ist, jedoch für gerade n nur dann, wenn zusätzlich

$$p_n = 2p_1$$

oder auch näherungsweise

$$a_n - a_{n-1} \approx 2a_1$$

festgelegt wird.

Zur Berechnung von a_k geht man von Gl. (20) aus, die besagt, daß jeder a_k -Wert gleich dem arithmetischen Mittelwert aus den zwei benachbarten Werten ist. Eine solche Aussage wird nur von einer linearen Funktion

$$a_k = \alpha k + \beta$$

erfüllt. Mit den Randbedingungen für $k = 1, n$ und $n - 1$

$$a_1 = \alpha + \beta, \quad a_n = \alpha n + \beta, \quad a_{n-1} = \alpha(n-1) + \beta$$

und den Gl. (21) und (23)

$$a_1 = 1 - a_n, \quad a_n - a_{n-1} \approx 2a_1$$

erhält man, wie durch Einsetzen leicht nachzuprüfen ist, für die Konstanten $\alpha \approx 1/n$ und $\beta \approx -1/2n$. Damit lautet die Lösung für den Exponenten

$$a_k \approx \frac{2k-1}{2n}; \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Mit $p_n = 2p_1$ geht Gl. (22) über in

$$\underline{p}_1 \approx p_1(1 - \varepsilon^n) \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

woraus sich schließlich mit Hilfe der Beziehungen zwischen Kreis- und Exponentialfunktionen die Näherungsformel (25) ergibt.

A.4. Zur Ableitung der allgemeinen Dimensionierung

Die Anpassungsbedingung

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} (a_k - a_{k-1}) = 0 \quad (27)$$

ergibt sich aus Gl. (26), indem für ε^{k-1} bei der Frequenz f_0 ($b = \pi/2$)

$$\varepsilon^{k-1} = e^{-j\pi(k-1)} = (-1)^{k-1}$$

gesetzt wird. Für Gl. (27) kann man aber auch

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} a_{k-1}$$

oder

$$-\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

schreiben. Durch Abspaltung von a_0 und a_{n+1} ,

$$-\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \pm a_{n+1} = a_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k,$$

und unter Beachtung, daß $a_0 \equiv 0$ und $a_{n+1} \equiv 1$ ist, erhält man schließlich

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k = \pm \frac{1}{2} \begin{cases} + \text{für gerade } n, \\ - \text{für ungerade } n. \end{cases} \quad (28)$$

Diese Summe setzt eine mit k monoton steigende Folge der a_k -Werte voraus, so daß als weitere Bedingung die Ungleichung

$$0 < a_1 < \dots < a_n < 1 \quad (29)$$

hinzu kommt.

Um den Betrag des Eingangsreflexionsfaktors $\underline{p}_1$ aus Gl. (12) berechnen zu können, setzt man darin wieder

$$\varepsilon^{k-1} = e^{-j2(k-1)b} = \cos 2(k-1)b - j \sin 2(k-1)b$$

ein. Der Ansatz für den Betrag von $\underline{p}_1$

$$|\underline{p}_1| \approx \quad (30)$$

$$\sqrt{\left[\sum_{k=1}^{n+1} p_k \cos 2(k-1)b \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^{n+1} p_k \sin 2(k-1)b \right]^2}$$

kann vereinfacht werden zu

$$\begin{aligned} |\underline{p}_1| &\approx \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} p_k p_i \cos 2(k-1)b \cos 2(i-1)b +} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} p_k p_i \sin 2(k-1)b \sin 2(i-1)b} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} p_k p_i \cos 2(k-i)b}. \end{aligned}$$

Setzt man darin noch die allgemeine Näherungsformel (15) ein, so erhält man schließlich

$$|\underline{p}_1| \approx \quad (31)$$

$$\frac{\ln t}{2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (a_k - a_{k-1})(a_i - a_{i-1}) \cos 2(k-i)b}.$$

Schrifttum

- [1] MEINKE, H. H., Das Breitbandproblem der Dezimeterwellentechnik. Elektrotechnik **2** [1948], 137–142.
- [2] WEISSFLOCH, A., Ein Transformationsglied für Dezimeter- und Zentimeterwellen mit geringer Frequenzabhängigkeit. Elekt. Nachr. Tech. **20** [1943], 189–191.
- [3] RUHRMANN, A., Die Reaktanz fehlangepaßter Resonanzleitungen. A.E.Ü. **5** [1951], 219–230.
- [4] DÄLLENBACH, W., Transformationsstücke mit von der Wellenlänge unabhängigem Übersetzungsverhältnis. Z. Hochfrequenztech. u. Elektroakustik **62** [1943], 33–38.
- [5] BURKHARDTSMAYER, W., Widerstandstransformation mit Leitungen. Funk u. Ton **3** [1949], 151–167.
- [6] SCHÜON, E. und WOLF, H., Die Darstellung von Mehrpolen durch die Streumatrix. Nachrichtentech. Z. **12** [1959], 361–366, 408–415.
- [7] GREWE, TH., Die Streumatrix (in „Theorie der Zweidrahtverstärker“). A.E.Ü. **13** [1959], 245–250.

Vorausbestimmung von Signalen mit Hilfe eines einfachen *RC*-Netzwerkes

VON ALFRED SCHIEF

Mitteilung aus dem Institut für Schwingungsforschung in Verbindung mit der Universität Tübingen

(A.E.Ü. 15 [1961], 91–93; eingegangen am 8. Dezember 1960)

DK 621.391:621.372.54

Die Ergebnisse werden mitgeteilt, die auf Grund einfacher, vom Taylorschen Satz ausgehender Überlegungen für die Vorausbestimmung von Signalen mit Hilfe von *RC*-Netzwerken gewonnen wurden. Ein *RC*-Netzwerk mit negativer Gruppenlaufzeit für einen bestimmten Frequenzbereich wurde zur Bestätigung der theoretischen Überlegungen aufgebaut.

Results are communicated as gained with the aid of *R-C* networks on the basis of simple considerations, starting from Taylor's theorem, for the prediction of signals. For their confirmation an *R-C* network was set up which has a negative group delay time for a certain frequency range.

1. Einleitung

Die Vorhersagetheorie von N. WIENER [1], [2] behandelt stationäre Zeitfunktionen, deren Verlauf durch die Angabe statistischer Größen gekennzeichnet ist. Die Vorhersage stellt nur einen Teil des Anwendungsbereichs der Theorie dar; ein zweiter Teil befaßt sich mit der Realisierung von in bestimmtem Sinne optimal dimensionierten Filtern zur Unterdrückung von Störungen, die einem Nutzsignal überlagert sind. Die statistischen Eigenschaften der beteiligten Zeitfunktionen müssen in Form ihrer Korrelationsfunktionen vorliegen; die Korrelationsfunktionen werden bei der Bestimmung der Übertragungsfunktionen der gewünschten Filter benötigt.

Eines der ersten, nach der WIENERSchen Theorie gebauten Vorhersagefilter ist auf eine Rauschspannung zugeschnitten, die durch Filtern von weißem Rauschen mit einem einfachen bedämpften Schwingkreis gewonnen wurde [3].

Der vorliegende Beitrag befaßt sich mit einem elementaren, vom Taylorschen Satz ausgehenden Weg zur Gewinnung eines linearen Vorhersagefilters.

2. Ein idealisierter Analogrechner

Für eine Funktion der Zeit $U(t)$, die hinreichend oft differenzierbar ist, lautet der Taylorsche Satz

$$U(t_0 + \Delta t) = \sum_{\nu=0}^n \frac{(\Delta t)^\nu}{\nu!} U^{(\nu)}(t_0) + R_n. \quad (1)$$

Dabei gilt für das Restglied nach Lagrange

$$R_n = \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} U^{(n+1)}(t_0 + \vartheta \Delta t); \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Gilt für R_n in einer Umgebung von t_0

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

so ist

$$U(t_0 + \Delta t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\Delta t)^\nu}{\nu!} U^{(\nu)}(t_0). \quad (2)$$

Werden zum Zeitpunkt t_0 alle Ableitungen der Funktion $U(t)$ gebildet und gemäß Gl. (2) die mit geeigneten festen Faktoren versehenen Glieder summiert, so erhält man den Wert der Funktion $U(t)$ an der Stelle $t_0 + \Delta t$; d. h., für $\Delta t > 0$ wird die Funktion $U(t)$ vorausbestimmt.

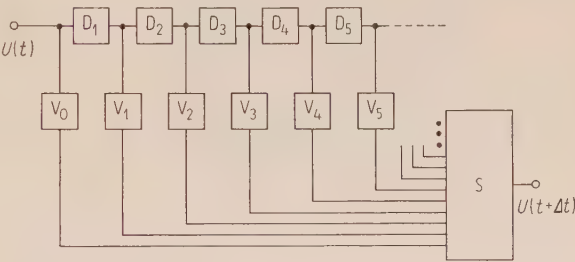


Bild 1. Ein idealisierter Analogrechner zur Vorausbestimmung eines Signales.

Ein nicht realisierbarer Analogrechner mit unendlich vielen Differenziereinrichtungen D_ν zur Ausführung dieser Operation hätte das in Bild 1 dargestellte Aussehen. In den Verstärkern V_ν werden die von der gewünschten Vorhersagezeit abhängigen konstanten Koeffizienten eingestellt. Das Additions-glied S bildet die Summe der Ausgangsspannungen der Verstärker V_ν ; an seinem Ausgang steht die vorhergesagte Funktion zur Verfügung.

Das in Bild 1 dargestellte Netzwerk hat die Übertragungsfunktion

$$f(p, \Delta t) = \frac{u_a}{u_e} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(p \Delta t)^\nu}{\nu!} = e^{p \Delta t}. \quad (3)$$

Dabei ist u_e die Amplitude einer am Eingang liegenden sinusförmigen Spannung der Frequenz $\omega/2\pi$, u_a die der zugehörigen sinusförmigen Spannung am Ausgang und für p gilt die Beziehung

$$p = i\omega.$$

Gl. (3) stellt die in der Sprache der Fourierschen Transformation ausgedrückte Gl. (2) dar.

Gl. (3) ist zu entnehmen, daß die Phasenbeziehung zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung

$$\varphi = \arctan \frac{u_e}{u_a} = -\omega \Delta t$$

lautet. Die Gruppenlaufzeit T_g ist konstant,

$$T_g = \frac{d\varphi}{d\omega} = -\Delta t.$$

Weiter ergibt sich aus Gl. (3), daß auch der Betrag der Übertragungsfunktion unabhängig von ω ist.

3. Ein realisierbarer Analogrechner

Ein solches ideales Vorhersagenetzwerk läßt sich nicht realisieren. Es kann nur eine endliche Anzahl von Schaltelementen eingesetzt werden. Es ist bekannt, daß die Vorhersage eines Signales um so besser möglich ist, je schärfer die Bandbegrenzung des Signales ist [4], [5]. Deshalb soll im folgenden Abschnitt zunächst ein idealisiertes Signal vorausgesetzt werden, dessen Amplitudenspektrum unterhalb einer Frequenz f_0 endlich und oberhalb dieser Frequenz Null ist. Zur Vorhersage dieses Signals werde eine endliche Anzahl von Differenziergliedern eingesetzt. Die Übertragungsfunktion des Vorhersagenetzwerkes ist dann

$$f_n(p, \Delta t) = \sum_{v=0}^n \frac{(p \Delta t)^v}{v!}. \quad (4)$$

Während der Betrag der Funktion $f(p, \Delta t)$ endlich und konstant war, gilt für $f_n(p, \Delta t)$

$$|f_n(p, \Delta t)| \rightarrow \infty \quad (|p| \rightarrow \infty).$$

Da jedoch voraussetzungsgemäß die spektralen Anteile der Eingangsspannung oberhalb der Frequenz f_0 verschwinden sollen, genügt es, auch in Gl. (4) für festes Δt nur beschränkte Werte der Größe $p \Delta t$ zu betrachten. Daraus folgt, daß bei einer endlichen Anzahl von Differenziergliedern der durch die unendlich vielen fehlenden Glieder verursachte Fehler bei jeder endlichen Vorhersagezeit beliebig klein gemacht werden kann.

Dieses scheinbar im Widerspruch zum Kausalitätsprinzip stehende Ergebnis wird verständlich, wenn man bedenkt, daß in jedem nichtperiodischen, d. h. realen Signal spektrale Anteile, unter Umständen mit kleiner Amplitude, enthalten sind, die bis zu beliebig hohen Frequenzen reichen.

Ein reales Signal gehorcht nicht den für die vorhergehende Betrachtung gemachten Voraussetzungen. Deshalb soll nun ein Signal betrachtet werden, dessen Amplitudenspektrum unterhalb einer Frequenz f_0 endlich ist und oberhalb dieser Frequenz nach der Beziehung $1/f^m$ abnimmt ($m > 0$). Aus der für eine endliche Zahl von Differenziergliedern geltenden Beziehung (4) folgt sofort, daß es jetzt zur Vorhersage nicht mehr möglich ist, eine beliebig große Anzahl von Differenziergliedern einzusetzen. Die wesentlichen, zur Vorhersage auszunutzenden spektralen Anteile liegen unterhalb der Frequenz f_0 ; die schnell veränderlichen Anteile oberhalb f_0 sollen als Störung angesehen werden.

Damit die durch diese Störung verursachten Beiträge zur Ausgangsspannung des Vorhersagenetzwerkes genügend klein bleiben, muß die Beziehung

$$n < m \quad (5)$$

erfüllt sein. Jetzt steht also zur Vorhersage der durch die wesentlichen Frequenzkomponenten bestimmten Spannung nur noch eine begrenzte Zahl von Differenziergliedern zur Verfügung. Das bedeutet, daß ein Kompromiß zwischen zugelassenem Fehler der Vorhersage und Dauer der Vorhersage geschlossen werden muß [5].

Die zur Vorhersage notwendige negative Gruppenlaufzeit im Nutzfrequenzband bedingt einen Abfall der Dämpfung oberhalb des Bandes. Dieser Abfall bewirkt die unerwünschte, starke Bewertung hochfrequenter Störspannungen im Ausgangssignal. Durch passende Dimensionierung der Differenzier-einrichtungen kann der dadurch verursachte Fehler reduziert werden. Der zur Differenzierung benötigte ω -proportionale Übertragungsfaktor eines Netzwerkes ist grundsätzlich nur bis zu einer endlichen oberen Grenzfrequenz realisierbar. Für höhere Frequenzen strebt der Übertragungsfaktor einem konstanten Wert zu. Man wird deshalb diese Grenzfrequenz so weit nach unten legen, als es der zugelassene Fehler bei der Differenzierung der wesentlichen Spannungskomponenten erlaubt. Dadurch wird erreicht, daß der erforderliche Abfall des Amplitudenspektrums nach der Beziehung $1/f^m$ nur bis zu einem in der Größenordnung der Grenzfrequenz der Differenzierglieder liegenden Wert gültig sein muß.

Dieser Gesichtspunkt gewinnt an Bedeutung im Zusammenhang mit der Vorhersage von realen Signalen, welchen zwangsläufig ein Rauschpegel überlagert ist. Bei der praktischen Durchführung einer Vorhersage ist außerdem der Frequenzgang des die vorhergesagte Spannung verwertenden Systems zu berücksichtigen. Dadurch kann eine weitere Verringerung der Voraussetzungen für das am Eingang liegende Signal erreicht werden.

4. Experimentelle Ergebnisse

In Bild 2 ist ein einfaches, mit vier Differenziergliedern ausgeführtes Vorhersagefilter dargestellt. Alle Differenzierglieder besitzen die gleiche Grenzfrequenz, durch geeignete Wahl ihrer Widerstände wurde eine ausreichende Entkopplung erzielt. Einzelne, den Gliedern der Taylorschen Reihe bei einer Vorhersagezeit von 200 μ s entsprechende Ströme werden durch hochohmige Widerstände gebildet. Sie erzeugen an einem gemeinsamen Widerstand die erwünschte Ausgangsspannung.

Die gesamte Versuchsanordnung ist in Bild 3 wiedergegeben. Einem Tonfrequenzrauschgenerator wird weißes Rauschen entnommen, das in einem veränderlichen Filter in seiner Bandbreite begrenzt wird. Ein Leistungsverstärker vor und ein Spannungsverstärker nach dem oben beschriebenen Vorhersagefilter gleichen die starke Dämpfung des ohne Rechenverstärker aufgebauten Netzwerkes aus. Die

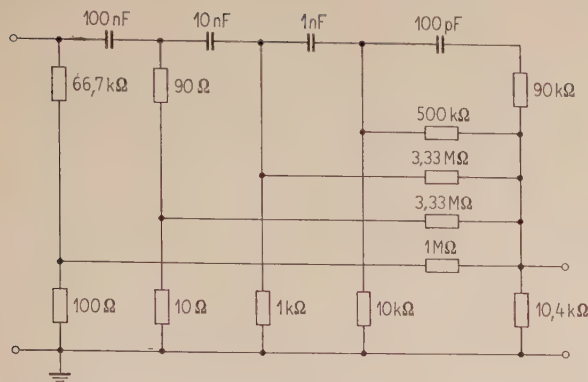


Bild 2. Realisiertes Vorhersagenetzwerk zur Vorausbestimmung eines bandbegrenzten Signales.



Bild 3. Blockschaltbild der Versuchsanordnung.

am Eingang und Ausgang des Filters liegenden Spannungen werden mit einem Speicheroszilloskop aufgezeichnet. Mit einmaliger Ablenkung, wobei durch einen elektronischen Umschalter eine Zweistrahlauflage ermöglicht wurde, ergaben sich die Oszillogramme in Bild 4. Die Eingangsspannung ist oben, die Ausgangsspannung unten abgebildet. Bild 4a zeigt Rauschen der Bandbreite 30 Hz bis 1 kHz, in Bild 4b ist selektives Rauschen mit der Bandmitte 1 kHz dargestellt. In Bild 4c hat die Rauschspannung die Bandbreite 30 Hz bis 1400 Hz; das gewählte Spektrum des Rauschens macht eine vollkommen störungsfreie Vorhersage mit dem realisierten Filter in diesem Fall unmöglich. Schließlich zeigt Bild 4d einen Rauschvorgang wie in Bild 4a, die beiden Vorgänge sind jedoch übereinander geschrieben. In allen Oszillogrammen beträgt der Zeitmaßstab 500 μ s/Teil, der Ablauf der Zeit erfolgt von links nach rechts.

Das bisher behandelte Filter ermöglicht die Vorhersage von beliebigen Rauschvorgängen, deren Spektrum den aufgestellten Begrenzungen unterliegt. Sehr schmalbandiges Rauschen kann als eine mit einem niederfrequenten Rauschen amplitudenmodulierte Trägerspannung betrachtet werden, deren Frequenz gleich der Bandmittenfrequenz des Rauschens ist. Die Information eines solchen Signals liegt im wesentlichen in der Hüllkurve; eine Vorhersage der Trägerspannung ist von geringerem Interesse. Werden die Kapazitäten des bisher behandelten Netzwerkes durch geeignete verlustarme Parallelschwingkreise ersetzt, so erhält man ein Vorhersagefilter, das auf extrem schmalbandige Vorgänge zugeschnitten ist. Auch hierbei müssen entsprechende Einschränkungen an die spektrale Verteilung der vorauszusagenden Spannung gemacht werden.

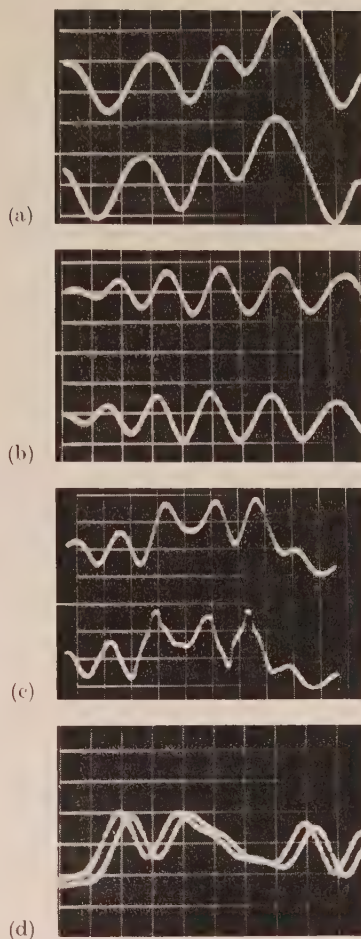


Bild 4. (a) Oszillogramm eines Rauschvorganges mit der Bandbreite 30 Hz bis 1000 Hz; oben: Spannung am Eingang des Netzwerkes nach Bild 2, unten: Spannung am Ausgang des Netzwerkes. Vorhersagezeit 200 μ s, Zeitmaßstab 500 μ s/Skt., Zeitablauf von links nach rechts.
(b) Oszillogramm eines selektiven Rauschvorganges mit der Bandmittenfrequenz 1000 Hz; übrige Angaben wie bei (a).
(c) Oszillogramm eines Rauschvorganges mit der Bandbreite 30 Hz bis 1400 Hz; übrige Angaben wie bei (a).
(d) Oszillogramm eines Rauschvorganges mit der Bandbreite 30 Hz bis 1000 Hz. Eingangs- und Ausgangsspannung des Netzwerkes nach Bild 2 sind übereinander geschrieben; übrige Angaben wie bei (a).

Schrifttum

- [1] WIENER, N., Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. NDRC-Rep., 1942; J. Wiley & Sons, New York 1949.
- [2] BODE, H. W. und SHANNON, C. E., A simplified derivation of linear least square smoothing and prediction theory. Proc. Inst. Radio Engrs. **38** [1950], 417–425.
- [3] LEE, Y. W. und STUTT, C. A., Statistical prediction of noise. MIT Tech. Rep. No. 129, 1949.
- [4] MARKO, H., Korrelation und Vorausbestimmung von Signalen. VDE-Fachber. **19** [1956], 3–8.
- [5] CARTWRIGHT, D. E., The prediction of a random function, given simultaneous values of its first few derivatives. J. Math. Phys. **37** [1958], 229–245.

Sechs „natürliche“ Normierungen der Stammgleichung dritten Grades

von EDUARD SCHWARTZ

Mitteilung aus dem Rogowski-Institut für Elektrotechnik der Technischen Hochschule Aachen

(A.E.Ü. 15 [1961], 94–100; eingegangen am 14. Dezember 1960)

DK 517.941

Auf grundsätzlich gleiche Weise werden sechs verschiedene Normierungen der Stammgleichung dritten Grades abgeleitet. Mit jeder dieser sechs Normierungen ist es leicht möglich, an Hand von Diagrammen wichtige Aussagen über die Lage der Wurzeln der Stammgleichung in der komplexen Ebene und damit über das Aussehen der Lösung der linearen, homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung zu machen. Die wichtigsten Unterschiede zwischen den zunächst gleichberechtigten Normierungen werden diskutiert. Ferner wird angegeben, welche der sechs Normierungen im Schrifttum bereits unabhängig voneinander benutzt wurden.

Of the third-degree characteristic equation whose solutions are the eigenvalues, six different normalizations are derived in basically the same manner. With each of these and by reference to diagrams it is easily possible to make important statements as to the position of the roots of the characteristic equation in the complex plane and hence concerning the solution of the linear, homogeneous differential equation of third order. The paper discusses the principal differences between the initially equivalent normalizations. It is also stated which of the six normalizations have already been adopted in technical literature independently of each other.

1. Einleitung

Die lineare, homogene Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$A_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + A_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + A_1 \frac{dy}{dt} + A_0 y = 0 \quad (1)$$

hat die Lösung

$$y = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + K_3 e^{p_3 t}, \quad (2)$$

wobei p_1 , p_2 und p_3 die Wurzeln der Stammgleichung oder charakteristischen Gleichung

$$A_3 p^3 + A_2 p^2 + A_1 p + A_0 = 0 \quad (3)$$

sind. (Bei Anwendung der Laplace-Transformation ist die linke Seite von Gl. (3) das Nennerpolynom der Laplace-Transformierten von y .) Für die Koeffizienten gilt bei technischen Anwendungen in der Regel

$$A_n = \text{reell} \quad (n = 0, 1, 2, 3). \quad (4)$$

Diese Einschränkung hat zur Folge, daß komplexe Wurzeln konjugiert komplex auftreten müssen. Ferner wollen wir solche Systeme ausschließen, die mit Sicherheit nicht stabil sind; oder anders ausgedrückt: Wir setzen voraus, daß die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für Stabilität (siehe z. B. [1])

$$A_n > 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3) \quad (5)$$

erfüllt ist. Infolge dieser Voraussetzung müssen reelle Wurzeln stets negativ sein. Praktisch wichtige Sonderfälle verschwindender Koeffizienten werden später besprochen.

Das Aussehen der Lösung Gl. (2) wird, abgesehen von den Konstanten K_1 , K_2 und K_3 , die aus den Anfangsbedingungen folgen, bestimmt durch die Wurzeln p_1 , p_2 und p_3 der Stammgleichung (3). Auf Grund der Lage der Wurzeln in der komplexen Ebene kann man bereits bezüglich des Aussehens der Lösung wichtige, in der Tabelle I zusammengestellte Aussagen machen.

Zu welchem dieser Bereiche bei gegebenen Koeffizienten A_0 bis A_3 die Lösung gehört, möchte man mit möglichst wenig Rechenarbeit und möglichst anschaulich erkennen können. Insbesondere möchte man die Berechnung der Wurzeln vermeiden, die trotz bekannter, nützlicher Verfahren zur Auflösung von Gleichungen dritten Grades (siehe u. a. [2] und [3]) lästig erscheint. Da man bekanntlich bei Gleichungen beliebigen Grades durch Normierung zwei Koeffizienten zu eins machen kann (siehe [4]), bleiben bei Gleichungen dritten Grades nur noch zwei veränderliche Koeffizienten übrig. Für diese beiden verbleibenden Koeffizienten kann man ein Diagramm berechnen, aus dem man die Zugehörigkeit der Lösung zu den Bereichen der Tabelle I schnell ablesen kann. Da man zwei beliebigen der vier Koeffizienten den Wert eins geben kann, findet man insgesamt sechs verschiedene Möglichkeiten zur Normierung. Diese wollen wir im folgenden einschließlich der zugehörigen Diagramme ableiten.

Tabelle I.

Bereich	Wurzeln	Lösung	
1	alle drei Wurzeln negativ reell	aperiodisch abklingender Vorgang	stabil
2	eine Wurzel negativ reell, ein konjugiert komplexes Wurzel-paar mit negativem Realteil	Vorgang mit abklingenden Schwingungen	
3	eine Wurzel negativ reell, ein konjugiert komplexes Wurzel-paar mit positivem Realteil	Vorgang mit anschwellenden Schwingungen	instabil

2. Die Normierungen

Gl. (3) dividieren wir durch m^3 , wobei m eine noch zu definierende reelle, positive Zahl sein soll:

$$A_3 \left(\frac{p}{m}\right)^3 + \frac{A_2}{m} \left(\frac{p}{m}\right)^2 + \frac{A_1}{m^2} \left(\frac{p}{m}\right) + \frac{A_0}{m^3} = 0. \tag{6}$$

Wir führen die neue Veränderliche

$$q = p/m \tag{7}$$

ein. Dann wird

$$A_3 q^3 + \frac{A_2}{m} q^2 + \frac{A_1}{m^2} q + \frac{A_0}{m^3} = 0. \tag{8}$$

Dividiert man diese Gleichung durch einen der vier Koeffizienten, so wird in der entstehenden Gleichung ein Koeffizient gleich eins; einen weiteren Koeffizienten kann man durch geeignete Wahl von m zu eins machen. Hierfür gibt es, wie oben erwähnt, sechs verschiedene Möglichkeiten, die in Tabelle II zusammengestellt sind.

Tabelle II.

Division von Gl. (8) durch	m	entstehende normierte Gleichung	Kurzbezeichnung
A_3	$\frac{A_2}{A_3}$	$q^3 + q^2 + a_1 q + a_0 = 0$	11 $a_1 a_0$
A_3	$\left(\frac{A_1}{A_3}\right)^{1/2}$	$q^3 + a_2 q^2 + q + a_0 = 0$	1 a_2 1 a_0
A_3	$\left(\frac{A_0}{A_3}\right)^{1/3}$	$q^3 + a_2 q^2 + a_1 q + 1 = 0$	1 $a_2 a_1$ 1
$\frac{A_2}{m}$	$\frac{A_1}{A_2}$	$a_3 q^3 + q^2 + q + a_0 = 0$	a_3 11 a_0
$\frac{A_2}{m}$	$\left(\frac{A_0}{A_2}\right)^{1/2}$	$a_3 q^3 + q^2 + a_1 q + 1 = 0$	a_3 1 a_1 1
$\frac{A_1}{m^2}$	$\frac{A_0}{A_1}$	$a_3 q^3 + a_2 q^2 + q + 1 = 0$	$a_3 a_2$ 11

Bei jeder der normierten Gleichungen ergeben sich zwei veränderliche Koeffizienten, die in Tabelle III zusammengestellt sind. Hier sind auch die wegen der Divisionen nötigen Voraussetzungen aufgeführt. Wegen Gl. (5) sind alle Koeffizienten der normierten Gleichungen ebenfalls positiv.

Zwei Schritte, deren Bedeutung wir jetzt untersuchen, waren bei der Ableitung der sechs Normierungen notwendig:

- 1. Da nach unseren Voraussetzungen m eine positive, reelle Zahl ist, bedeutet Gl. (7) nur eine Maßstabsänderung in der komplexen Ebene. Die grundsätzliche Lage der Wurzeln der Stammgleichung bleibt dabei unverändert. In der Lösung Gl. (2) kann man Gl. (7) als Einführung einer normierten Zeit (mt) auffassen.
- 2. Die Division von Gl. (8) durch einen Koeffizienten beeinflusst die Wurzeln der Stammgleichung nicht.

Tabelle III.

Normierung	Koeffizienten	Voraussetzungen
11 $a_1 a_0$	$a_1 = A_1 A_3 / A_2^2$ $a_0 = A_0 A_3^2 / A_2^3$	$A_3 \neq 0$ $A_2 \neq 0$
1 a_2 1 a_0	$a_2 = A_2 / (A_1 A_3)^{1/2}$ $a_0 = A_0 A_3^{3/2} / A_1^{3/2}$	$A_3 \neq 0$ $A_1 \neq 0$
1 $a_2 a_1$ 1	$a_2 = A_2 / A_3^{2/3} A_0^{1/3}$ $a_1 = A_1 / A_3^{1/3} A_0^{2/3}$	$A_3 \neq 0$ $A_0 \neq 0$
a_3 11 a_0	$a_3 = A_1 A_3 / A_2^2$ $a_0 = A_0 A_2 / A_1^2$	$A_2 \neq 0$ $A_1 \neq 0$
a_3 1 a_1 1	$a_3 = A_3 A_0^{1/2} / A_2^{3/2}$ $a_1 = A_1 / (A_0 A_2)^{1/2}$	$A_2 \neq 0$ $A_0 \neq 0$
$a_3 a_2$ 11	$a_3 = A_3 A_0^2 / A_1^3$ $a_2 = A_2 A_0 / A_1^2$	$A_1 \neq 0$ $A_0 \neq 0$

Da beide Normierungsschritte die grundsätzliche Lage der Wurzeln in der komplexen Ebene nicht verändern, nennen wir die hier durchgeführten Normierungen „natürlich“. (Eine in diesem Sinne „unnatürliche“ Normierung wird z. B. in [5] benutzt; sie hat den Vorteil, daß die Stammgleichung dritten Grades durch nur noch einen veränderlichen Koeffizienten beschrieben werden kann.)

3. Die Bereichsgrenzen

Wie wir soeben feststellten, ist die grundsätzliche Lage der Wurzeln der normierten Gleichungen in Tabelle II die gleiche wie diejenige der Wurzeln der ursprünglichen Gl. (3). Wir können also die Frage nach der Art der Lösung im Sinne von Tabelle I mit Hilfe der normierten Gleichungen beantworten. Dies hat den Vorteil, daß jeweils nur noch zwei veränderliche Koeffizienten für das Aussehen der Lösung maßgebend sind. Zunächst können wir unsere Betrachtungen für alle Normierungen gemeinsam durchführen. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Gleichung

$$a_3 q^3 + a_2 q^2 + a_1 q + a_0 = 0, \tag{9}$$

Tabelle IV.

Normierung	konstante Koeffizienten	
11 $a_1 a_0$	$a_3 = 1$	$a_2 = 1$
1 a_2 1 a_0	$a_3 = 1$	$a_1 = 1$
1 $a_2 a_1$ 1	$a_3 = 1$	$a_0 = 1$
a_3 11 a_0	$a_2 = 1$	$a_1 = 1$
a_3 1 a_1 1	$a_2 = 1$	$a_0 = 1$
$a_3 a_2$ 11	$a_1 = 1$	$a_0 = 1$

von der ausgehend man zu jeder gewünschten Normierung der Tabelle II übergehen kann, indem man jeweils zwei Koeffizienten gleich eins setzt, siehe Tabelle IV.

Wir nehmen an, eine Wurzel von Gl. (9) sei reell und zwei seien konjugiert komplex:

$$q_1 = r, \quad q_2 = x + jy, \quad q_3 = x - jy. \quad (10)$$

Da man Gl. (9) auch in der Produktform

$$a_3(q - q_1)(q - q_2)(q - q_3) = 0 \quad (11)$$

darstellen kann, erhält man durch Koeffizientenvergleich von Gl. (9) und Gl. (11)

$$a_2 = -a_3(2x + r), \quad (12)$$

$$a_1 = a_3(x^2 + y^2 + 2xr), \quad (13)$$

$$a_0 = -a_3r(x^2 + y^2). \quad (14)$$

Mit Hilfe von Gl. (14) ersetzen wir in Gl. (12) und Gl. (13) r . Dann wird

$$a_2 = -2a_3x + a_0/(x^2 + y^2), \quad (15)$$

$$a_1 = a_3(x^2 + y^2) - 2a_0x/(x^2 + y^2). \quad (16)$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich leicht die Grenzen für die in Tabelle I angeführten Bereiche ableiten.

3.1. Stabilitätsgrenze

Die Grenze zwischen Bereich 3 und Bereich 2 in Tabelle I ist durch das Nullwerden des Realteils des konjugiert komplexen Wurzelpaares gekennzeichnet. Sie wird „Stabilitätsgrenze“ genannt. Für diese gilt also

$$x = 0. \quad (17)$$

Hiermit wird aus Gl. (15) oder Gl. (16)

$$a_2 = a_0/y^2, \quad a_1 = a_3y^2$$

oder nach Eliminieren von y

$$a_2a_1 = a_0a_3. \quad (18)$$

3.2. Mathematische Schwingungsgrenze

Läßt man den Imaginärteil des konjugiert komplexen Wurzelpaares immer kleiner und schließlich Null werden, so erhält man drei reelle Wurzeln. Somit gilt für die Grenze zwischen Bereich 1 und Bereich 2 der Tabelle I, die wir „mathematische Schwingungsgrenze“ nennen wollen,

$$y = 0. \quad (19)$$

Dies in Gl. (15) und Gl. (16) eingesetzt ergibt

$$a_2 = -2a_3x + a_0/x^2, \quad (20)$$

$$a_1 = a_3x^2 - 2a_0/x. \quad (21)$$

3.3. Praktische Schwingungsgrenze

Die Feststellung, daß eine Lösung von Gl. (1) zum Bereich 2 der Tabelle I gehört, genügt in der Praxis oft nicht. Man möchte zusätzlich wissen, ob die abklingenden Schwingungen stark gedämpft sind (das ist in der Nähe der mathematischen Schwingungsgrenze der Fall) oder nur schwach (dieser Fall tritt in der Nähe der Stabilitätsgrenze auf). Im ersten

Fall ist dem Betrag nach der Realteil des konjugiert komplexen Wurzelpaares groß, im zweiten Fall klein gegenüber dem Imaginärteil. (Weitergehende Ausführungen zu diesem Thema siehe z. B. [5], [6] und [7].) Aus Symmetriegründen liegt es rein theoretisch nahe, den Fall, bei dem der Realteil betragsmäßig gerade gleich dem Imaginärteil ist, als Grenze zwischen den Gebieten schwacher und starker Dämpfung zu definieren; aber auch praktisch erweist sich diese Definition als sinnvoll, wie man an dem später behandelten Beispiel erkennen kann. Diese durch

$$|y| = |x| \quad \text{oder} \quad y^2 = x^2 \quad (22)$$

definierte Grenze wollen wir „praktische Schwingungsgrenze“ nennen. Mit Gl. (22) wird aus Gl. (15) und Gl. (16)

$$a_2 = -2a_3x + a_0/2x^2, \quad (23)$$

$$a_1 = 2a_3x^2 - a_0/x. \quad (24)$$

Es sei noch erwähnt, daß man der hier definierten praktischen Schwingungsgrenze entsprechende Kurven für beliebige Verhältnisse von Realteil zu Imaginärteil der komplexen Wurzeln auf die gleiche Weise berechnen kann (Beispiel siehe [5]).

3.4. Zusammenfassung

Die wichtigsten Überlegungen bezüglich der verschiedenen Bereiche und ihrer Grenzen sind in der Tabelle V zusammengefaßt.

Tabelle V.

Bereich	Schwingungen	Grenzen
1	keine	$y = 0$ mathematische Schwingungsgrenze nach Gl. (20), (21)
2a	abklingend stark gedämpft	$ y = x $ praktische Schwingungsgrenze nach Gl. (23), (24)
2b	abklingend schwach gedämpft	$ y = x $ praktische Schwingungsgrenze nach Gl. (23), (24)
3	anschwellend	$x = 0$ Stabilitätsgrenze nach Gl. (18)

4. Die Diagramme

Nach den vorangegangenen Ausführungen, die für alle Normierungen gelten, wollen wir jetzt wieder zu den einzelnen in Tabelle II angeführten Normierungen übergehen. Zu diesem Zweck müssen wir entsprechend Tabelle IV jeweils zwei Koeffizienten gleich eins setzen. Auf diese Weise findet man mit Gl. (20) und Gl. (21) für die mathematischen Schwingungsgrenzen die in Tabelle VI zusammengestellten Funktionen. Für die praktischen Schwingungsgrenzen erhält man aus Gl. (23) und (24) die in Tabelle VII angeführten Beziehungen. Die Stabilitätsgrenzen ergeben sich aus Gl. (18) wie in Tabelle VIII angegeben.

Tabelle VI.

Normierung	mathematische Schwingungsgrenze
$1\,1\,a_1\,a_0$	$a_1 = -2x - 3x^2$ $a_0 = x^2 + 2x^3$
$1\,a_2\,1\,a_0$	$a_2 = -3x/2 - 1/2x$ $a_0 = x^3/2 - x/2$
$1\,a_2\,a_1\,1$	$a_2 = -2x + 1/x^2$ $a_1 = x^2 - 2/x$
$a_3\,1\,1\,a_0$	$a_3 = -1/3x^2 - 2/3x$ $a_0 = -2x/3 - x^2/3$
$a_3\,1\,a_1\,1$	$a_3 = 1/2x^3 - 1/2x$ $a_1 = -3/2x - x/2$
$a_3\,a_2\,1\,1$	$a_3 = 1/x^2 + 2/x^3$ $a_2 = -2/x - 3/x^2$

Tabelle VII.

Normierung	praktische Schwingungsgrenze
$1\,1\,a_1\,a_0$	$a_1 = -2x - 2x^2$ $a_0 = 2x^2 + 4x^3$
$1\,a_2\,1\,a_0$	$a_2 = -x - 1/2x$ $a_0 = 2x^3 - x$
$1\,a_2\,a_1\,1$	$a_2 = -2x + 1/2x^2$ $a_1 = 2x^2 - 1/x$
$a_3\,1\,1\,a_0$	$a_3 = -1/2x^2 - 1/x$ $a_0 = -2x - 2x^2$
$a_3\,1\,a_1\,1$	$a_3 = 1/4x^3 - 1/2x$ $a_1 = -1/2x - x$
$a_3\,a_2\,1\,1$	$a_3 = 1/2x^2 + 1/2x^3$ $a_2 = -1/x - 1/2x^2$

Tabelle VIII.

Normierung	Stabilitätsgrenze
$1\,1\,a_1\,a_0$	$a_1 = a_0$
$1\,a_2\,1\,a_0$	$a_2 = a_0$
$1\,a_2\,a_1\,1$	$a_2 = 1/a_1$
$a_3\,1\,1\,a_0$	$a_3 = 1/a_0$
$a_3\,1\,a_1\,1$	$a_3 = a_1$
$a_3\,a_2\,1\,1$	$a_3 = a_2$

Die mathematischen Schwingungsgrenzen nach Tabelle VI und die praktischen Schwingungsgrenzen nach Tabelle VII sind im Gegensatz zu den Stabilitätsgrenzen nach Tabelle VIII in Parameterform (mit x als Parameter) gegeben. (Man könnte zwar x eliminieren, aber die dabei entstehenden Funktionen sind viel unübersichtlicher und numerisch umständlicher auszuwerten als die verhältnismäßig einfachen Parameterdarstellungen.) In Bild 1 sind diese Grenzen und die in Tabelle V aufgeführten Bereiche für alle sechs Normierungen dargestellt. Wie im Zusammenhang mit Tabelle III erwähnt, ist jeweils nur der erste Quadrant von Interesse, da alle Koeffizienten positiv sind. Diese Diagramme ermöglichen uns, mit jeder der sechs Normierungen schnell festzustellen, welcher Art die Lösung der Differentialgleichung (1) ist. Alle sechs Normierungen erscheinen also zunächst gleichberechtigt. Daß sie dies nicht sind, wenn man bestimmte Sonderfälle erfassen will, werden wir im nächsten Abschnitt zeigen.

5. Erörterung der Unterschiede und Bemerkungen

In diesem Abschnitt wollen wir die wichtigsten Unterschiede zwischen den sechs Normierungen besprechen und noch verschiedene Bemerkungen anknüpfen.

Bei der Betrachtung der Diagramme in Bild 1 erkennt man, daß die Normierungen $1\,1\,a_1\,a_0$, $a_3\,1\,1\,a_0$ und $a_3\,a_2\,1\,1$ den Vorteil haben, daß bei ihnen wenigstens die schwingungsfreien und die praktisch schwingungsfreien Bereiche ganz im Endlichen liegen (also vollständig dargestellt sind), während bei den restlichen drei Normierungen alle Bereiche sich bis ins Unendliche erstrecken (also nur unvollständig dargestellt sind).

Daß die sechs Normierungen physikalisch nicht vollkommen gleichwertig sind, erkennt man an den von Normierung zu Normierung verschiedenen Voraussetzungen in Tabelle III: Bei jeder Normierung muß ein anderes Koeffizientenpaar als von Null verschieden angenommen werden. Dadurch wird jeweils ein anderes Paar von Grenzfällen der Differentialgleichung (1) ausgeschlossen, und alle Normierungen sind in bezug auf die enthaltenen Sonderfall-Paare verschieden. Wir wollen hier aber nur die beiden wichtigsten Sonderfälle betrachten:

1. $A_3 = 0$, aus der homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung (1) wird eine solche zweiter Ordnung,
2. $A_0 = 0$, aus der homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung (1) wird (nach einmaliger Integration) eine inhomogene zweiter Ordnung mit zeitlich konstantem Störglied.

In welchen Normierungen diese Sonderfälle enthalten sind, geht aus Tabelle IX hervor.

Mit Hilfe von Tabelle III erkennt man, wie die besprochenen Sonderfälle 1 und 2 den Achsen der Diagramme in Bild 1 zuzuordnen sind. Beschränkt man sich auf stabile Systeme, so sind die im Gebiet

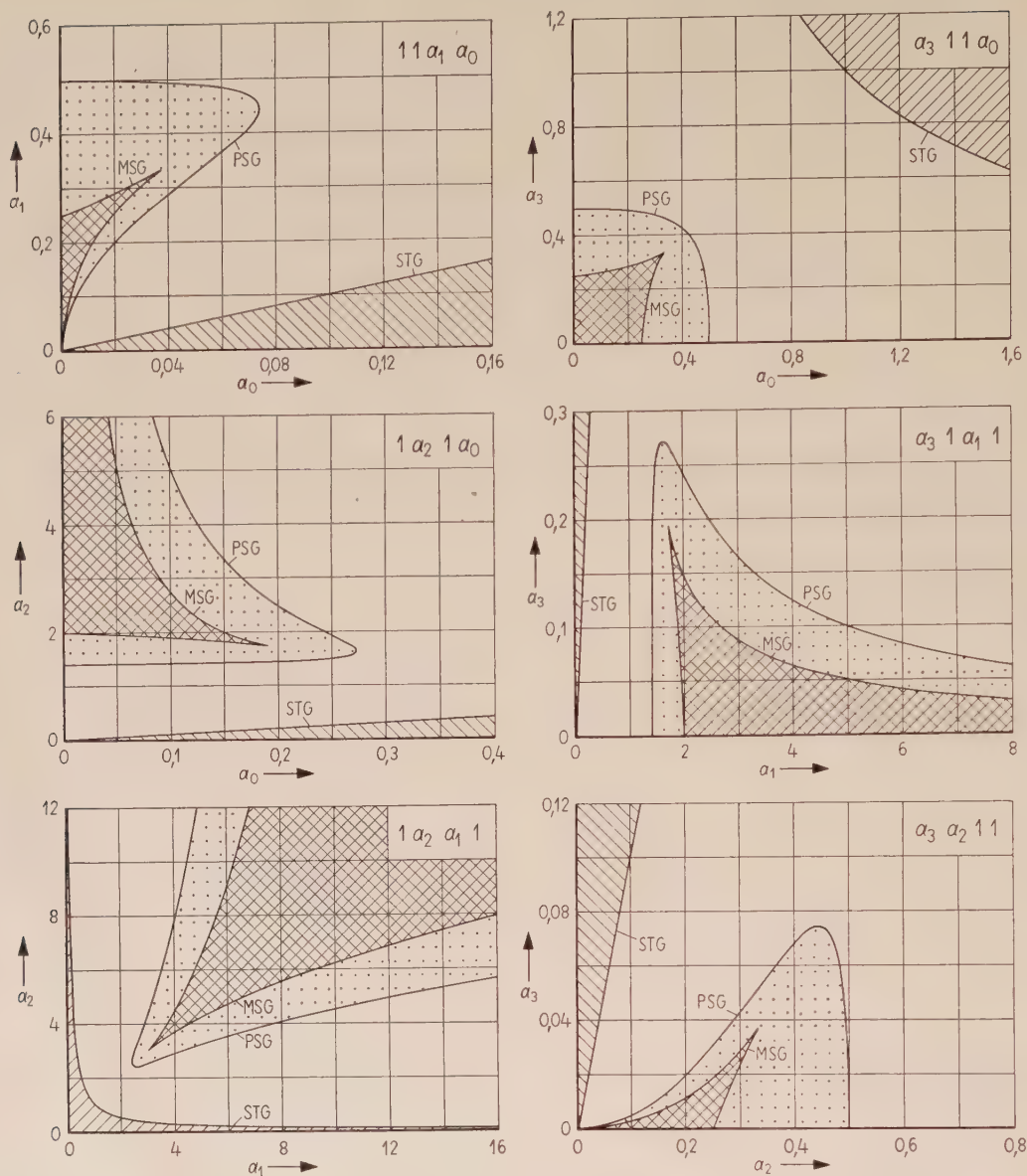


Bild 1. Die verschiedenen Bereiche der sechs Normierungen und ihre Grenzen; keine Schwingungen: gekreuzt schraffiert, stark gedämpfte Schwingungen: punktiert, schwach gedämpfte Schwingungen: weiß, anschwellende Schwingungen: einfach schraffiert, mathematische Schwingungsgrenze: MSG, praktische Schwingungsgrenze: PSG, Stabilitätsgrenze: STG.

Tabelle IX.

Normierung	Sonderfall 1 $A_3 = 0$	Sonderfall 2 $A_0 = 0$
$11a_1a_0$	nicht enthalten	enthalten
$1a_21a_0$	nicht enthalten	enthalten
$1a_2a_11$	nicht enthalten	nicht enthalten
a_311a_0	enthalten	enthalten
a_31a_11	enthalten	nicht enthalten
a_3a_211	enthalten	nicht enthalten

Tabelle X.

Normierung	Abszisse in Bild 1	Ordinate in Bild 1
$11a_1a_0$	bedeutungslos	Sonderfall 2
$1a_21a_0$	bedeutungslos	Sonderfall 2
$1a_2a_11$	bedeutungslos	bedeutungslos
a_311a_0	Sonderfall 1	Sonderfall 2
a_31a_11	Sonderfall 1	bedeutungslos
a_3a_211	Sonderfall 1	bedeutungslos

anschwellender Schwingungen liegenden Achsen nicht von Interesse. In Tabelle X haben wir unter diesem Gesichtspunkt die Bedeutungen der Achsen in den Diagrammen von Bild 1 zusammengestellt.

Übrigens bemerkt man in Bild 1 eine außerordentliche Ähnlichkeit zwischen den Grenzkurven der $11a_1a_0$ - und der a_3a_211 -Normierung. Tatsächlich sind die Grenzkurven gleich. Ersetzt man nämlich in den Gleichungen für die mathematische Schwingungsgrenze (Tabelle VI) bei der Normierung $11a_1a_0$ den Parameter x durch $1/x$, ferner a_1 durch a_2 und a_0 durch a_3 , so erhält man die Gleichungen der Normierung a_3a_211 . Entsprechend erhält man die praktische Schwingungsgrenze (Tabelle VII), wenn man x durch $1/2x$ ersetzt. Trotz dieser Gleichheit der Grenzkurven sind beide Normierungen, wie wir eben sahen (Tabelle IX), nicht gleichwertig. — Sinngemäß die gleichen Überlegungen gelten für die äußere Gleichheit der Grenzkurven bei der $1a_21a_0$ - und der a_31a_11 -Normierung.

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir noch angeben, welche der sechs Normierungen im Schrifttum bereits veröffentlicht wurden. Soweit uns bekannt ist, ist das bei drei Normierungen der Fall:

$11a_1a_0$

Diese Normierung wurde zuerst von BÖGEL [8] angegeben. Etwas später wurde sie in [5] auf Gleichungen vierten Grades erweitert. Sie zeichnet sich vor den anderen Normierungen dadurch aus, daß sich die Wurzeln der zugehörigen normierten Stammgleichung (siehe Tabelle II) besonders einfach bestimmen lassen: Man zeichnet einmal ein Kurvenblatt mit der Funktion $q^3 + q^2$; zu beliebigen normierten Koeffizienten a_1 und a_0 findet man dann schnell die immer vorhandene reelle Wurzel, indem man in dieses Kurvenblatt die Gerade $-(a_1q + a_0)$ einträgt.

$1a_2a_11$

Dies ist wohl die älteste Normierung der Stammgleichung dritten Grades: 1877 wurde sie von WISCHNEGRADSKI in [9] veröffentlicht. Auch in neuerer Zeit wird sie noch gern benutzt, siehe z. B. [10]. In [11] wird sie auf Gleichungen vierten Grades erweitert.

a_311a_0

Diese Normierung zeichnet sich vor den übrigen fünf dadurch aus, daß bei ihr zwei wichtige Sonderfälle erfaßt werden (siehe Tabelle IX). Sie entspricht der von VONDENBUSCH [12] angegebenen Normierung. Beim Vergleich unserer Normierung a_311a_0 mit derjenigen in [12] ist folgender, grundsätzlich allerdings bedeutungsloser Unterschied zu beachten: Die normierten Koeffizienten sind in [12] dreimal so groß wie die von uns in Tabelle III definierten. Interessant ist, daß VONDENBUSCH seine Normierung auf gänzlich andere Weise herleitet: Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist die CAR-DANISCHE Formel zur Auflösung von Gleichungen dritten Grades, die wir hier nicht benutzt haben.

6. Beispiel

Als Beispiel zur Veranschaulichung der verschiedenen Bereiche und ihrer Grenzen sind in Bild 2 einige mit Hilfe eines elektronischen Analogrechners berechnete Lösungen der Differentialgleichung (1) dargestellt. Die (willkürlich gewählten) Anfangsbedingungen lauten

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) \neq 0.$$

Den Koeffizienten der Differentialgleichung wurden solche Größen gegeben, daß sich nach Durchführung der $11a_1a_0$ -Normierung für a_0 der konstante Wert 0,02 ergibt, während a_1 von Lösung zu Lösung steigt. Im Diagramm für die $11a_1a_0$ -Normierung in Bild 1 bewegen wir uns also parallel zur a_1 -Achse senkrecht nach oben. Man erkennt deutlich die Nützlichkeit der Bereiche und ihrer Grenzen zur Abschätzung der Art der Lösung.

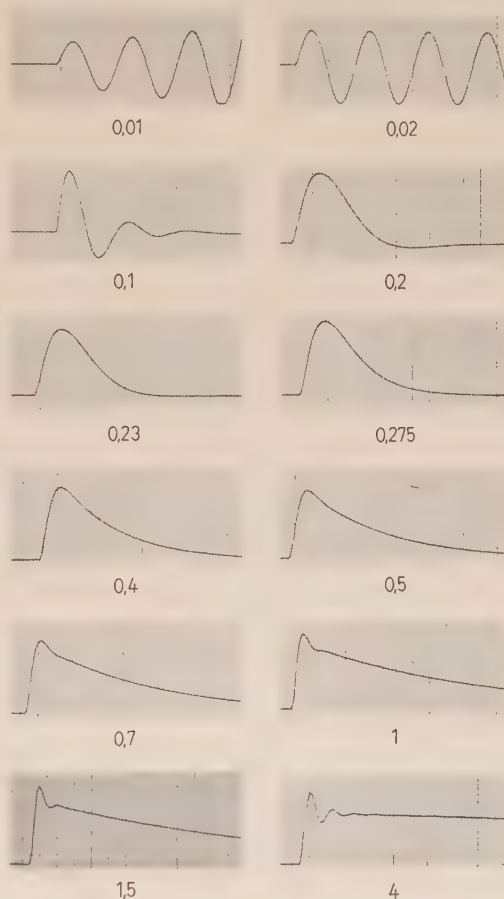


Bild 2. Einige Lösungen der Differentialgleichung (1). Für die $11a_1a_0$ -Normierung gilt in allen Fällen $a_0 = 0,02$, während a_1 die an den einzelnen Lösungen stehenden Werte hat.

7. Zusammenfassung

Auf gemeinsame Weise werden sechs „natürliche“ Normierungen der Stammgleichung dritten Grades abgeleitet, wovon drei bereits früher unabhängig voneinander angegeben wurden. Diese Normierungen werden „natürlich“ genannt, da durch die not-

wendigen Normierungsschritte die grundsätzliche Lage der Wurzeln in der komplexen Ebene nicht verändert wird. Für jede dieser sechs normierten Stammgleichungen werden an Hand der Lage der Wurzeln Bereiche definiert und die zugehörigen Grenzen berechnet, mit deren Hilfe wichtige Aussagen über das Verhalten der Lösung der linearen, homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung mit denkbar geringem Rechenaufwand möglich sind. (Der notwendige Rechenaufwand besteht nur in der Berechnung der normierten Koeffizienten nach Tabelle III.) Diese Bereiche sind für jede Normierung in Form von Diagrammen dargestellt. Die wichtigsten Unterschiede zwischen den zunächst gleichberechtigten Normierungen werden besprochen, so daß im Bedarfsfall die Entscheidung über die Zweckmäßigkeit der einen oder anderen Normierung erleichtert wird. Einige Beispiele für die Lösung der linearen, homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung veranschaulichen die durchgeführten Berechnungen und Überlegungen.

Schrifttum

- [1] SCHULER, M., Einführung in die Theorie der selbsttätigen Regler. Akad. Verlagsges., Leipzig 1956.
- [2] ZURMÜHL, R., Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. Springer-Verlag, Berlin 1953.
- [3] EMDE, F., Tafeln elementarer Funktionen. 2. Aufl. B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1948.
- [4] OPPELT, W., Kleines Handbuch technischer Regelvorgänge; 2. Aufl. Verlag Chemie, Weinheim/Bergstraße 1956.
- [5] SCHWARTZ, E., Schwingungsfreie Stoßschaltungen mit drei, vier oder fünf Energiespeichern. Dissertation Techn. Hochschule Aachen 1959.
- [6] LEONHARD, A., Stabilitätskriterium insbesondere von Regelkreisen bei vorgeschriebener Stabilitätsgüte. Arch. Elektrotech. **39** [1948], 100–107.
- [7] LEONHARD, A., Die selbsttätige Regelung. Springer-Verlag, Berlin 1949.
- [8] BÖGEL, K., Über ein für Stabilitätsuntersuchungen geeignetes Normdiagramm der Gleichungen dritten Grades. Wiss. Z. Hochschule für Elektrotechnik Ilmenau **2** [1956], 1–3.
- [9] WISCHNEGRADSKI, J., Über direktwirkende Regulatoren. Der Zivilingenieur **23** [1877], 95–113.
- [10] OPPELT, W., Zum Dämpfungsgrad der Regelungsdifferentialgleichung dritter Ordnung. Arch. Elektrotech. **37** [1943], 357–360.
- [11] SCHMIDT, K., Stabilität und Aperiodizität bei Bewegungsvorgängen vierter Ordnung. Arch. Elektrotech. **37** [1943], 217–220.
- [12] VONDENBUSCH, A., Ein allgemeines Berechnungsverfahren für Stoßschaltungen mit drei voneinander unabhängigen Energiespeichern. Dissertation Techn. Hochschule Aachen 1958.

BUCHBESPRECHUNGEN

J. L. Stewart, *Circuit analysis of transmission lines*. J. Wiley & Sons, New York 1958, XII, 186 Seiten, 71 Bilder, 15,5 cm × 23,5 cm, Ganzleinen US-\$ 5.50.

Das Buch ist in Anlehnung an eine Grundlagenvorlesung des Verfassers über die Leitungstheorie entstanden und als Lehrbuch für Studierende gedacht. Es betont bewußt die analytische Untersuchung der Leitungen unter den verschiedensten Bedingungen.

Der Verfasser geht von den Differentialgleichungen des kurzen Leitungsstückes aus. Bei der allgemeinen Betrachtung von Wellen auf Leitungen bei verschiedenen Abschlußwiderständen beschränkt er sich auf den Fall einer Leitung ohne Phasenverzerrung. Das Einschwingverhalten bei komplexen Abschüssen wird mit der Heavisideschen Operatorenrechnung behandelt. Das führt zu der bekannten, für Anfänger etwas verwirrenden Schreibweise, bei der Zeitfunktionen und Funktionen in p in einer Gleichung auftreten.

Vom Kapitel 4 an werden Leitungen im eingeschwungenen Zustand untersucht. Bei der Darstellung stehender Wellen auf fehlangepaßten Leitungen sowie bei der Behandlung von Leitungen als Resonatoren fällt auf, daß der Verfasser seine Betrachtungen stets auf verlustbehaftete Leitungen erstreckt. Die verlustfreie Leitung wird als Sonderfall mitbehandelt. Es läßt sich damit ein besseres Bild von den tatsächlichen Verhältnissen erreichen als bei einer späteren Berücksichtigung der Verluste nach eingehender Darstellung des verlustfreien Falles. Ein Abschnitt mit Leistungsbetrachtungen schafft die Verbindung zu den Energieversorgungsleitungen.

Der Darstellung einer Leitung durch Ersatzschaltbilder aus konzentrierten Elementen ist ein Kapitel gewidmet, ein weiteres der Meßtechnik bei Leitungen. Der Verfasser behandelt erst im letzten Kapitel die graphischen Methoden zur Lösung von Leitungsproblemen (Smith-Diagramm), um die Ausrichtung des Buches auf die Analyse der Leitungen hervorzuheben und den Leser zu einem „analytischen Denken“ zu bringen. Der Anhang bringt Daten praktischer Leitungen.

Dem Lehrbuchcharakter des Buches entsprechend vermeidet der Verfasser schwierige Beweise. Er versteht es, die wesentlichen Punkte des Themas in übersichtlicher Form darzustellen. Die jedem Kapitel angefügten zahlreichen Aufgaben sind bei der Durcharbeitung des Buches nützlich, wenn auch, wie im amerikanischen Schrifttum üblich, keine Lösungen angegeben sind. Das Buch erfüllt seine Aufgabe, Studierenden eine leicht faßliche Einführung in die Leitungstheorie zu

geben und zugleich eine Zusammenstellung des notwendigen Wissens zu bringen, in sehr guter Weise. Es kann daher dem angesprochenen Leserkreis empfohlen werden. W. SCHÜSSLER

K. L. Chung, *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities*. Springer-Verlag, Berlin 1960, X, 278 Seiten, 16 cm × 24 cm, kartoniert DM 65,60, Ganzleinen DM 69,80.

Die Theorie der Markoffschen Ketten ist ein Spezialfall der allgemeinen Theorie der zufälligen oder stochastischen Prozesse. In der Unterklasse der Markoffschen Prozesse — das sind diejenigen Prozesse, bei denen grob gesprochen die Wahrscheinlichkeit für den gegenwärtigen Zustand nur von einer Bedingung oder Aussage über einen vergangenen Zustand allein abhängt — liegt die noch kleinere Klasse der Markoffschen Ketten. Hier ist die zufällige Variable höchstens abzählbar vieler Werte fähig. Der (Zeit-)Parameter kann diskret oder kontinuierlich sein. Als weiteren sehr wichtigen Sonderfall hat man die Theorie der stationären Markoffschen Ketten, das sind solche, deren beschreibende elementare Wahrscheinlichkeitsverteilungen zeitlich invariant sind, wo also die elementaren Übergangswahrscheinlichkeiten stationär sind.

Wenn ein so bekannter Verfasser wie K. L. CHUNG über diese speziellen stochastischen Prozesse ein Buch im Umfang des vorliegenden Werkes schreibt, so ist gesichert, daß es fast das gesamte vorhandene und gesicherte Material bringt. Eine Inhaltsangabe würde hier zu weit führen oder wäre nichtsagend.

Die Markoffschen Ketten sind die am weitesten erforschten stochastischen Prozesse überhaupt, sie sind für den Wahrscheinlichkeitstheoretiker sehr wichtig. Sie haben aber auch eine enorme Bedeutung für diejenigen, die sich für die Anwendungen interessieren. Hier seien als Beispiel nur die Theorie der Diffusion, die Bewegung von Ladungsträgern in Feldern, Monte-Carlo-Methoden zur praktischen Lösung von Randwertaufgaben und gewisse Verkehrs- und Abfertigungsprobleme der Verkehrs- oder Vermittlungstheorie genannt.

Das Buch ist äußerst klar und mathematisch streng geschrieben, sicher nicht leicht lesbar, aber für jeden, der sich mit der Theorie dieser zufälligen Prozesse befassen will, ungeschränkt zu empfehlen. Die äußere Ausstattung ist gewohnt gut, als einziger Druckfehler ist dem Referenten ein überflüssiger Buchstabe (stoch(i)astic) in Zeile 6, S. 134, aufgefallen.

E. HENZE

Beitrag zur Theorie der minimalen Rauschzahl von rauscharmen Wanderfeldröhren*

VON KARL-B. NICLAS

Mitteilung aus dem Röhrenlaboratorium der Telefunken G.m.b.H., Ulm (Donau)

(A.E.U. 15 [1961], 101–107; eingegangen am 30. November 1960)

DK 621.385.63

Die Bedingungen werden formuliert, die zur Erreichung der minimalen Eigenrauschzahl einer rauscharmen Wanderfeldröhre eingehalten werden müssen. Diese gehen in ihrer allgemeinen Fassung über die von S. BLOOM und R. W. PETER gefundenen Angaben hinaus. Es läßt sich nämlich zeigen, daß eine Vielzahl von Lösungsmöglichkeiten existiert, die Optimalbedingungen für die Mindestrauschzahl einer Wanderfeldröhre zu erfüllen.

Darüber hinaus wird ein Meßverfahren besprochen, das es gestattet, das Produkt aus den Mittelwerten des Strom- und Spannungsschwankungsquadrates im Potentialminimum zu ermitteln, ohne die Optimalbedingungen für das Rauschminimum einzuhalten.

The conditions, leading to the minimum noise figure of a low-noise traveling-wave tube are formulated. These conditions have a more general character than those formulated by S. BLOOM and R. W. PETER. It can be shown, that a multitude of possibilities exist which satisfy the optimum conditions for the minimum noise figure.

Moreover a measuring method is discussed, which allows the product of the mean squared voltage and current fluctuations in the potential minimum region to be determined without satisfying the optimum conditions for minimum noise.

1. Einleitung

Die untere Grenze der empfangbaren, Signalleistung ist für jeden Verstärker durch sein Eigenrauschen festgelegt. Besonders bei Eingangsverstärkern wird man daher bestrebt sein, möglichst niedrige Eigenrauschzahlen zu erhalten, um die Verstärkerempfindlichkeit zu erhöhen. Diese Forderung gewinnt mit steigender Frequenz noch mehr an Bedeutung, da das galaktische Rauschen mit kürzer werdender Wellenlänge immer mehr abnimmt.

Im Frequenzbereich oberhalb 2 GHz ist die Wanderfeldröhre der gebräuchlichste Verstärkertyp. Eine Spezialausführung ist die sogenannte „rauscharme“ Wanderfeldröhre, wie sie erstmalig von R. W. PETER [1] beschrieben worden ist. Sie hat zur Verminderung ihres Eigenrauschens ein spezielles Strahlerzeugungssystem (Bild 1), das aus mehreren hintereinanderliegenden Elektroden besteht, durch die der Strahl hindurchtreten muß, bevor er in den Bereich der Verzögerungsleitung eintritt. Die einzelnen Elektroden liegen an verschiedenen Gleichpotentialen und bestimmen damit die Elektronengeschwindigkeit in axialer Richtung.

Durch geeignete Wahl des Potentialverlaufes entlang der Strahlachse kann das für den Wanderfeldröhrenverstärker theoretisch erzielbare Rauschminimum erreicht werden. Die Bedingungen, die das Strahlerzeugungssystem hierzu erfüllen muß, wurden in einer speziellen Form von S. BLOOM und R. W. PETER [2] angegeben.

Im folgenden soll nun die allgemeine Form der Bedingungen besprochen werden, die zur minimalen Eigenrauschzahl einer rauscharmen Wanderfeld-

röhre führen. Im Gegensatz zu [2] läßt sich nämlich zeigen, daß es eine Vielzahl von Lösungsmöglichkeiten gibt, die Optimalbedingungen für die Mindestrauschzahl zu erfüllen, und daß dort ein Sonderfall dieser Möglichkeiten angegeben wird.

Ferner wird ein Meßverfahren beschrieben, mit dessen Hilfe man das Produkt aus den Mittelwerten des Strom- und Spannungsschwankungsquadrates im Potentialminimum ermitteln kann, ohne die Optimalbedingungen für das Rauschminimum zu erfüllen. Da das Produkt der mittleren Schwankungsquadrate für die minimale Eigenrauschzahl maßgebend ist, kann diese mit Hilfe des erwähnten Meßverfahrens auch bei Nichteinhaltung der Optimalbedingungen vorausgesagt werden.

Die wichtigsten theoretisch gefundenen Rauschgrößen werden mit den entsprechenden Meßwerten verglichen, die an einem speziellen Wanderfeldröhrenaufbau gewonnen wurden.

2. Der Vierpol des Strahlerzeugungssystems

In Bild 1 ist das Strahlerzeugungssystem einer rauscharmen Wanderfeldröhre entsprechend seinen Funktionen in drei Teilbereiche aufgeteilt [3]. Jedem dieser Teilbereiche läßt sich ein Vierpol zuordnen, dessen Transformationseigenschaften durch die vier Elemente der Vierpolmatrix vollständig bestimmt sind.

Durch Zusammenschaltung des Dioden- und des Transformationsbereiches erhält man einen Vierpol mit den Matricelementen¹

$$A_{12} = A_1 A_2 - \frac{Z_2}{Z_1} C_1 B_2, \quad (1a)$$

$$B_{12} = B_1 A_2 + \frac{Z_2}{Z_1} D_1 B_2, \quad (1b)$$

* Erweitertes Kapitel aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Hochschule Aachen genehmigten Dissertation „Die Transformation von Elektronenwellen in rauscharmen Strahlerzeugungssystemen für Wanderfeldröhren“.

¹ Eine Zusammenstellung der wichtigsten verwendeten Bezeichnungen findet sich am Schluß des Beitrages.

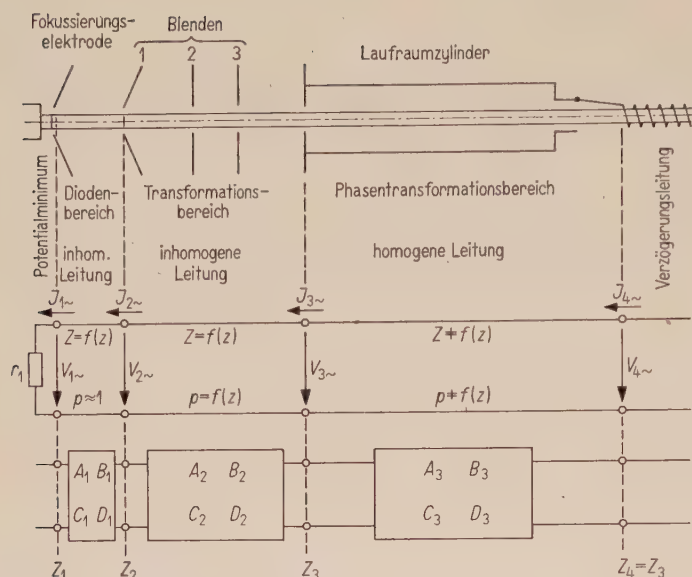


Bild 1. Funktionsbereiche eines rauscharmen Strahlerzeugungssystems.

$$C_{12} = C_1 D_2 + \frac{Z_1}{Z_2} A_1 C_2, \quad (1c)$$

$$D_{12} = D_1 D_2 - \frac{Z_1}{Z_2} B_1 C_2. \quad (1d)$$

Innerhalb des in Bild 1 dargestellten Laufraumes ändern sich nur die Phasenbeziehungen der Elektronenwellen, da die Gleichgeschwindigkeitskomponente der Elektronen v_- in diesem Bereich konstant bleibt. Die Eigenschaften des Phasentransformationsbereiches werden daher durch die bekannte Vierpolmatrix [5], [6]

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos \Phi & j Z_3 \sin \Phi \\ j \frac{1}{Z_3} \sin \Phi & \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (2)$$

beschrieben.

$$\Phi = p \frac{\omega_p}{v_-} z \quad (3)$$

ist hier der sogenannte „reduzierte Plasmaphasenwinkel“ des gleichfeldfreien Laufraumes.

Mit den in Bild 1 eingezeichneten Größen der Teilvierpole lauten nun unter Berücksichtigung von Gl. (1) die Vierpolparameter des gesamten Strahlerzeugungssystems

$$A = A_{12} \cos \Phi - \frac{Z_3}{Z_1} C_{12} \sin \Phi, \quad (4a)$$

$$B = B_{12} \cos \Phi + \frac{Z_3}{Z_1} D_{12} \sin \Phi, \quad (4b)$$

$$C = C_{12} \cos \Phi + \frac{Z_1}{Z_3} A_{12} \sin \Phi, \quad (4c)$$

$$D = D_{12} \cos \Phi - \frac{Z_1}{Z_3} B_{12} \sin \Phi. \quad (4d)$$

Für die Wechselgrößen des aus drei Teilvierpolen zusammengesetzten Gesamtvierpols gilt die Matrix-

gleichung²

$$\begin{pmatrix} V_{4\sim} \\ J_{4\sim} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & j Z_1 B \\ j \frac{1}{Z_1} C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{1\sim} \\ J_{1\sim} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

3. Die Eigenrauschzahl

Für die Eigenrauschzahl einer rauscharmen Wanderfeldröhre sind der Wechselkonvektionsstrom und die kinetische Wechselspannung am Eingang der Verzögerungsleitung maßgebend. Setzt man diese Größen in die von D. A. WATKINS [7] angegebene Eigenrauschzahl (zusätzliche Rauschzahl) einer Wanderfeldröhre³

$$F_z = \frac{I_-}{2 \frac{e}{m} C k T_0 \Delta f} \left| (\delta_2 + \delta_3) v_{4\sim} - j v_{4\sim} C \frac{I_{4\sim}}{I_-} (\delta_2 \delta_3 - 4 Q C) \right|^2 \quad (6)$$

ein, so erhält man den Ausdruck

$$F_z = \frac{\sqrt{4 Q C}}{2 Z_4 k T_0 \Delta f} \cdot \left| (\delta_2 + \delta_3) U_{4\sim} - j Z_4 I_{4\sim} \frac{\delta_2 \delta_3 - 4 Q C}{\sqrt{4 Q C}} \right|^2. \quad (7)$$

Beide Formeln enthalten die von J. R. PIERCE [8] vorgeschlagenen Wanderfeldröhrenparameter: C Verstärkungsparameter, Q Raumladungsparameter und δ_2, δ_3 Wellenfortpflanzungsparameter.

Für die Berechnung der Eigenrauschzahl ist es von größter Wichtigkeit, ob die Strom- und Spannungsschwankungen im Potentialminimum $U_{1\sim}$ bzw. $I_{1\sim}$ miteinander korreliert sind. Auf Grund theoretischer Untersuchungen [9], [10] kann diese Frage für ein Diodenmodell, dessen Äquipotentialebenen parallel zur Kathodenoberfläche angeordnet sind, verneint werden. Das aber bedeutet, daß zwei unabhängige Rauschquellen vorhanden sind, die vollkommen getrennt betrachtet werden müssen. Die Rauschgrößen innerhalb des Strahles setzen sich, entsprechend ihren Quellen im Potentialminimum, aus zwei Komponenten zusammen, die völlig unabhängig nebeneinander bestehen⁴:

$$U_{\sim} = U_{I\sim} (U_{1\sim}) + U_{II\sim} (I_{1\sim}), \quad (8a)$$

$$I_{\sim} = I_{I\sim} (U_{1\sim}) + I_{II\sim} (I_{1\sim}). \quad (8b)$$

Damit wird auch die Eigenrauschzahl (7) in zwei Teile aufgespalten. Man erhält

² Der Index 4 bezieht sich auf die Größen am Eingang der Verzögerungsleitung, siehe Bild 1.

³ Die Gl. (6) und (7) haben nur dann Gültigkeit, wenn innerhalb des Elektronenstrahles eine Raumladungswchselfeldstärke nur in Richtung der Strahlachse vorhanden ist und die Verstärkung der Röhre genügend hoch ist ($G > 10$ dB).

⁴ Der Index 1 bezieht sich auf die Größen im Potentialminimum, siehe Bild 1.

$$F_z = \frac{\sqrt{4QC}}{2Z_4 k T_0 \Delta f} [|\alpha U_{4\sim}(U_{1\sim}) - j\beta Z_4 I_{4\sim}(U_{1\sim})|^2 + |\alpha U_{4\sim}(I_{1\sim}) - j\beta Z_4 I_{4\sim}(I_{1\sim})|^2] \quad (9)$$

mit

$$\alpha = \delta_2 + \delta_3 \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\delta_2 \delta_3 - 4QC}{\sqrt{4QC}}. \quad (10a, b)$$

Nach Einführen der Winkel

$$\tan \alpha_1 = \frac{Z_3}{Z_1} \frac{C_{12}}{A_{12}} \quad \text{und} \quad \tan \alpha_2 = -\frac{Z_3}{Z_1} \frac{D_{12}}{B_{12}} \quad (11a, b)$$

kann man nach einigen elementaren Rechenschritten für die Eigenrauschzahl (Gl. (9)) auch schreiben [2]:

$$F_z = \frac{\sqrt{4QC}}{2Z_4 k T_0 \Delta f} \left[\left(\frac{A_{12}}{\cos \alpha_1} \right)^2 |\alpha \cos(\Phi + \alpha_1) + \beta \sin(\Phi + \alpha_1)|^2 \tilde{U}_1^2 + \left(\frac{B_{12}}{\cos \alpha_2} \right)^2 |\alpha \cos(\Phi + \alpha_2) + \beta \sin(\Phi + \alpha_2)|^2 Z_1^2 \tilde{I}_1^2 \right].$$

Hierin ist

$$\tilde{I}_1^2 = I^2 2e I_- \Delta f \quad (13a)$$

das mittlere Quadrat der Stromschwankungen im Potentialminimum [11] und

$$\tilde{U}_1^2 = 2(4 - \pi) \frac{(k T_k)^2}{e I_-} \Delta f \quad (13b)$$

das mittlere Quadrat der kinetischen Wechselspannung [12].

Der Raumladungsschwächungsfaktor I^2 in Gl. (13a) ist das Verhältnis des mittleren Rauschstromquadrates der raumladungsbegrenzten Diode zu dem der Sättigungsdiode. I^2 ist frequenzabhängig und hat sein Maximum in der Nähe der Plasmafrequenz im Potentialminimum [9], [13].

Durch Einführen der Beziehung

$$|\alpha \cos \psi + \beta \sin \psi|^2 = \frac{1}{2} \{ (|\alpha|^2 + |\beta|^2) + |\alpha^2 + \beta^2| \cos(2\psi - \varphi) \}, \quad (14a)$$

$$\text{in der} \quad \tan \varphi = \frac{\alpha \beta^* + \alpha^* \beta}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \quad (14b)$$

ist, läßt sich der Ausdruck für die Eigenrauschzahl unter Berücksichtigung der Reziprozitätsbedingung

$$(A_1 D_1 + B_1 C_1)(A_2 D_2 + B_2 C_2) = 1 \quad (15)$$

weiter vereinfachen [2]:

$$F_z = F_{zu} [(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + |\alpha^2 + \beta^2| \cos(2\Phi + \gamma_1)] + F_{zi} [(|\alpha|^2 + |\beta|^2) + |\alpha^2 + \beta^2| \cos(2\Phi + \gamma_2)]. \quad (16)$$

Es bedeuten

$$F_{zu} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4QC}}{2Z_4 k T_0 \Delta f} \tilde{U}_1^2 \left[\frac{\cos \alpha_2}{B_{12}} \frac{Z_3}{Z_1} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \right]^2,$$

$$F_{zi} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4QC}}{2Z_4 k T_0 \Delta f} Z_1^2 \tilde{I}_1^2 \left(\frac{B_{12}}{\cos \alpha_2} \right)^2, \quad (17b)$$

$$\gamma_1 = 2\alpha_1 - \varphi \quad \text{und} \quad \gamma_2 = 2\alpha_2 - \varphi. \quad (18a, b)$$

4. Die minimale Eigenrauschzahl und ihre Bedingungen

Der Phasentransformationsbereich verhält sich wegen der konstanten Geschwindigkeit, mit der sich die Elektronen in ihm fortbewegen, wie eine homogene Leitung. Da die Vierpolgrößen in ihm nach Gl. (2) entweder Kosinus- oder Sinusfunktionen sind, ändert sich die Eigenrauschzahl der Röhre entlang der Strahlachse periodisch.

Unter spezieller Berücksichtigung der Eigenschaften des Phasentransformationsbereiches Gl. (2) wurde nach einigen Rechenschritten für die Eigenrauschzahl der Ausdruck (16) gefunden. Die Gl. (16) läßt sich nun mit Hilfe trigonometrischer Umformungen in eine übersichtlichere Form bringen.

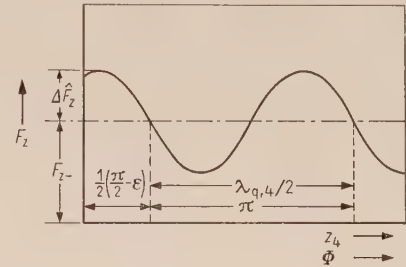


Bild 2. Die Eigenrauschzahl im gleichfeldfreien Laufraum.

Es ist nämlich

$$F_z = (F_{zu} + F_{zi}) (|\alpha|^2 + |\beta|^2) + \sqrt{F_{zu}^2 + F_{zi}^2 + 2F_{zu}F_{zi} \cos(\gamma_1 - \gamma_2)} \cdot |\alpha^2 + \beta^2| \cos(2\Phi + \epsilon). \quad (19)$$

Der Phasenwinkel ϵ kann aus

$$\tan \epsilon = \frac{F_{zu} \sin \gamma_1 + F_{zi} \sin \gamma_2}{F_{zu} \cos \gamma_1 + F_{zi} \cos \gamma_2} \quad (20)$$

bestimmt werden.

Man erkennt, daß Gl. (19) aus einem Gleich- und einem Wechselanteil zusammengesetzt ist. Da

$$\Phi = p \frac{2\pi}{\lambda_{p,4}} z_4 = \frac{2\pi}{\lambda_{q,4}} z_4 \quad (21)$$

($\lambda_{p,4}$ Plasmawellenlänge im Phasentransformationsbereich, z_4 Länge des Phasentransformationsbereiches)

der reduzierte Plasmaphasenwinkel im Phasentransformationsbereich ist, entspricht die Periode des Wechselanteiles der Eigenrauschzahl einer halben reduzierten Plasmawellenlänge.

Mißt man sie innerhalb des gleichfeldfreien Laufraumes einer rauscharmen Elektronenkanone, so ergibt sich ein grundsätzlicher Verlauf, wie er in Bild 2 dargestellt ist.

Die Abhängigkeit der Eigenrauschzahl von der Laufraumlänge gemäß Bild 2 kann man mit einer geeigneten Wanderfeldröhrenanordnung messen. Diese kann so aufgebaut sein, daß die Verzögerungsleitung gegenüber der Kanone in axialer Richtung beweglich angeordnet ist. Der Raum zwischen der

letzten Kanonenelektrode und dem Eingang der Verzögerungsleitung ist dann der Phasentransformationsbereich, dessen Länge verändert werden kann. Die Verzögerungsleitung und die letzte Elektrode der Kanone liegen auf gleichem Potential. Den Aufbau einer solchen Meßwanderfeldröhre zeigt Bild 3.

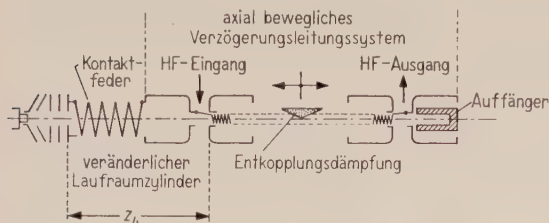


Bild 3. Anordnung zur Messung der Eigenrauschzahl einer rauscharmen Wanderfeldröhre in Abhängigkeit von der Laufraumlänge z_4 .

In Anlehnung an Bild 2 kann man für Gl. (19) auch

$$F_z = F_{z-} + \Delta \hat{F}_z \cos(2\Phi + \varepsilon) \quad (22)$$

schreiben. Hierin bedeuten

$$F_{z-} = (F_{zu} + F_{zi}) (|\alpha|^2 + |\beta|^2) \quad (23a)$$

und

$$\Delta \hat{F}_z = (F_{zu} + F_{zi}) |\alpha^2 + \beta^2| \cdot \sqrt{1 - \frac{2 F_{zu} F_{zi}}{(F_{zu} + F_{zi})^2} [1 - \cos(\gamma_1 - \gamma_2)]}. \quad (23b)$$

Mit den Gl. (17) und (18) erhält man

$$2 F_{zu} F_{zi} [1 - \cos(\gamma_1 - \gamma_2)] = \left(\frac{\sqrt{4QC}}{2kT_0 \Delta f} \right)^2 \tilde{U}_1^2 \tilde{I}_1^2. \quad (24)$$

Für den Fall, daß zwischen den Geschwindigkeits- und Stromschwankungen im Potentialminimum keine Korrelation vorhanden ist, läßt sich aus den Gl. (23) und (24) die Hyperbelgleichung

$$\left(\frac{F_{z-}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \right)^2 - \left(\frac{\Delta \hat{F}_z}{|\alpha^2 + \beta^2|} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{4QC}}{2kT_0 \Delta f} \right)^2 \tilde{U}_1^2 \tilde{I}_1^2 \quad (25)$$

ableiten.

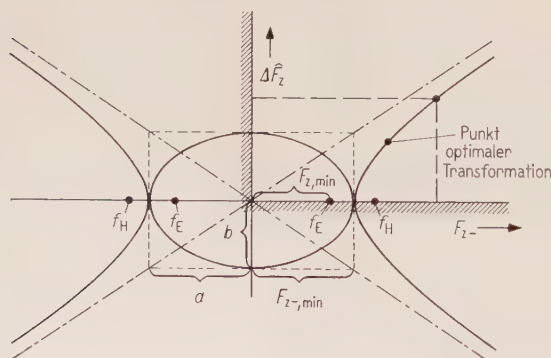


Bild 4. Rauschtransformationshyperbel einer Wanderfeldröhre;

$$a = \frac{\sqrt{4QC}}{2kT_0 \Delta f} |U_1| |I_1| (|\alpha|^2 + |\beta|^2),$$

$$b = \frac{\sqrt{4QC}}{2kT_0 \Delta f} |U_1| |I_1| |\alpha^2 + \beta^2|.$$

In Bild 4 sind der Gleichanteil F_{z-} und der Wechselanteil $\Delta \hat{F}_z$ der Eigenrauschzahl dargestellt. In Abhängigkeit von den Transformationseigenschaften des Strahlerzeugungssystems einer rauscharmen Wanderfeldröhre bewegen sich beide Größen auf der durch Gl. (25) beschriebenen Hyperbel, die man aus diesem Grund auch Rauschtransformationshyperbel nennen kann.

Da α und β Parameter sind, die nur von den Eigenschaften innerhalb der Verzögerungsleitung abhängen, ist man nun in der Lage, das Produkt aus den mittleren Quadraten der Spannungs- und Stromschwankungen zu messen, ohne die Eigenschaften der Kanone zu kennen.

Innerhalb des Phasentransformationsbereiches findet man die minimale Eigenrauschzahl

$$F_z = F_{z-} - \Delta \hat{F}_z \quad (26)$$

am Ort

$$2\Phi_{\text{opt}} + \varepsilon = \pm \pi. \quad (27)$$

Für den optimalen Laufraumwinkel Φ_{opt} gilt mit Gl. (20) und (27)

$$\tan 2\Phi_{\text{opt}} = - \frac{F_{zu} \sin \gamma_1 + F_{zi} \sin \gamma_2}{F_{zu} \cos \gamma_1 + F_{zi} \cos \gamma_2}. \quad (28)$$

Die in Gl. (26) gefundene Eigenrauschzahl bei optimalem Laufraumwinkel läßt sich mit Hilfe der Transformationseigenschaften der rauscharmen Elektronenkanone weiter verbessern.

Der Gleich- und der Wechselanteil der Eigenrauschzahl (26) können jetzt noch sowohl durch die Vierpolgrößen des Dioden- als auch durch die Vierpolgrößen des Transformationsbereiches verändert werden. Es soll nun untersucht werden, für welche Winkel α_1 und α_2 , wie sie in Gl. (11) definiert wurden, die Eigenrauschzahl ihren optimalen Wert annimmt.

In Abhängigkeit vom Winkel α_1 findet man dabei gleich zwei Bedingungen, für die ein Minimum bezüglich α_1 vorhanden sein muß. Es sind

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \pm \pi/2 \quad (29a)$$

und

$$\frac{4 F_{zu} F_{zi}}{(F_{zu} + F_{zi})^2} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) = 1 - \left(\frac{|\alpha^2 + \beta^2|}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \right)^2. \quad (29b)$$

Die Minimumbedingung (29b) tritt auch in dem Fall auf, wenn man den Optimalwert des Winkels α_2 aufsucht. Da das Produkt

$$4 F_{zu} F_{zi} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2 F_{zu} F_{zi} [1 - \cos(\gamma_1 - \gamma_2)]$$

gemäß Gl. (24) unabhängig von den Transformationseigenschaften der Kanone ist, muß die mit der Bedingung (29b) erreichte Eigenrauschzahl die optimal erzielbare sein.

Aus der Optimalbedingung (29b) und der Gl. (24) erhält man

$$(F_{zu} + F_{zi})_{\text{opt}} = \frac{\sqrt{4QC}}{2kT_0 \Delta f} |U_1| |I_1| \cdot \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{\sqrt{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - |\alpha^2 + \beta^2|^2}}. \quad (30)$$

Durch Einsetzen von Gl. (30) in Gl. (23) findet man mit Gl. (26) die minimale Eigenrauschzahl

$$F_{z, \min} = \frac{\sqrt{4QC}}{2kT_0\Delta f} \quad (31)$$

$$\cdot |U_{1\sim}| |I_{1\sim}| \sqrt{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - |\alpha^2 + \beta^2|^2}.$$

Es gibt also auf unserer Rauschtransformationshyperbel in Bild 4 einen Punkt, für den die Eigenrauschzahl Gl. (26) ihren minimalen Wert Gl. (31) annimmt. Dieser ist gleich dem Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt derjenigen Ellipse, die mit der Hyperbel in Gl. (25) die Halbachsen a und b gemeinsam hat.

Das Rauschen einer rauscharmen Wanderfeldröhre wird nun immer dann sein theoretisch erzielbares Minimum erreichen, wenn die Bedingungen (28) und (29b) eingehalten werden.

Die Bedingung (29a) braucht daher, wie gezeigt wurde, zum Erreichen der theoretisch minimalen Eigenrauschzahl Gl. (31) nicht erfüllt zu sein⁵. Es bleibt zu prüfen, in welchen Grenzen der Winkel $\alpha_1 - \alpha_2$ schwanken darf, damit Gl. (29b) noch befriedigt werden kann.

Durch Einsetzen der Faktoren F_{zu} und F_{zi} wird aus Gl. (30)

$$\begin{aligned} & \frac{|U_{1\sim}|}{Z_1 |I_{1\sim}|} \frac{Z_3}{Z_1} \left[\frac{\cos \alpha_2}{B_{12}} \frac{1}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} \right]^2 + \\ & + \frac{Z_1 |I_{1\sim}|}{|U_{1\sim}|} \frac{Z_1}{Z_3} \left(\frac{B_{12}}{\cos \alpha_2} \right)^2 = \quad (32) \\ & = 2 \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{\sqrt{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - |\alpha^2 + \beta^2|^2}}. \end{aligned}$$

Gl. (32) hat wegen ihrer quadratischen Form die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} & \frac{|U_{1\sim}|}{Z_1 |I_{1\sim}|} \frac{Z_3}{Z_1} \left(\frac{\cos \alpha_2}{B_{12}} \right)^2 = \quad (33) \\ & = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{\sqrt{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - |\alpha^2 + \beta^2|^2}} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2) \pm \\ & \pm \sqrt{\frac{|\alpha^2 + \beta^2|^2 - (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 \cos^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - |\alpha^2 + \beta^2|^2}} \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Da auf der linken Seite von Gl. (33) nur reelle Größen stehen, existiert nur für

⁵ S. BLOOM und R. W. PETER [2] gehen im Gegensatz dazu von der Überlegung aus, daß die Bedingung (29a) eine Voraussetzung zur Erlangung der minimalen Eigenrauschzahl ist. Erst in einer dann folgenden Extremwertbetrachtung finden sie eine zweite Bedingung (35), die erfüllt sein muß, damit das theoretisch erzielbare Rauschminimum erreicht wird. Hier und im folgenden kann gezeigt werden, daß die beiden in [2] angegebenen Optimalbedingungen nur ein Sonderfall einer einzigen Bedingung (33) sind, die im Bereich (34) für beliebige Winkel α_1 und α_2 Gültigkeit hat. Damit wird hier im Gegensatz zu [2], wo sich die Verfasser von vornherein auf einen einzigen Sonderfall beschränken, eine Vielzahl von Lösungsmöglichkeiten (33) angegeben, die Mindestrauschzahl zu erreichen.

$$\cos^2(\alpha_1 - \alpha_2) \leq \left(\frac{|\alpha^2 + \beta^2|}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \right)^2 \quad (34)$$

ein Lösungspaar.

Für den von S. BLOOM und R. W. PETER [2] gefundenen Sonderfall (23a) lautet Gl. (33)⁶

$$\begin{aligned} & \frac{|U_{1\sim}|}{Z_1 |I_{1\sim}|} \frac{Z_3}{Z_1} \left(\frac{\cos \alpha_2}{B_{12}} \right)^2 = \quad (35) \\ & = \sqrt{\frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 \pm |\alpha^2 + \beta^2|^2}{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 \mp |\alpha^2 + \beta^2|^2}}. \end{aligned}$$

Die Gl. (32) stellt die allgemeine Bedingungsgleichung dar, die zur Erlangung der minimalen Eigenrauschzahl einer rauscharmen Wanderfeldröhre erfüllt sein muß. Im Bereich der Bedingung (34) hat sie ein reelles Lösungspaar, das für den Sonderfall Gl. (29a) in Gl. (35) übergeht.

$|U_{1\sim}|/|Z_1| |I_{1\sim}|$ hat die Form eines bezogenen Widerstandes. Er liegt in der Ebene des Potentialminimums und kann dort berechnet werden. In dem Fall, daß die Bedingung (33) erfüllt ist, kann somit die rauscharme Elektronenkanone gemäß Bild 1 als eine verlustlose Leitung betrachtet werden, die mit dem bezogenen Strahlwiderstand

$$r_1 = \frac{|U_{1\sim}|}{Z_1 |I_{1\sim}|} \quad (36)$$

abgeschlossen ist.

Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß es sich bei dem bezogenen Strahlwiderstand (36) um eine definierte Größe handelt, die wegen ihrer Dimension als bezogener Widerstand angesprochen werden kann. Da die Spannungs- und Stromschwankungen im Potentialminimum aber nicht miteinander korreliert sein sollen, hat die Definition (36) nur als reine Rechengröße ihre Bedeutung.

Für den charakteristischen Strahlwiderstand des Potentialminimums gilt die Beziehung

$$Z_1 = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\left(\frac{\pi}{2} \frac{k T_k}{m} \right)^{3/2}}{\frac{e}{m} \omega^2 \varepsilon_0 F I_-}} \quad (37)$$

(F Strahlquerschnitt).

Ist der Verlauf der Eigenrauschzahl im Phasentransformationsbereich (Bild 2) einer rauscharmen Elektronenkanone bekannt, so kann man die minimale Eigenrauschzahl Gl. (31) berechnen, ohne die Transformationseigenschaften zu kennen.

Durch Einsetzen von Gl. (25) in Gl. (31) findet man

$$F_{z, \min} = F_{z-, \min} \sqrt{1 - \left(\frac{|\alpha^2 + \beta^2|}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \right)^2}, \quad (38a)$$

$$F_{z-, \min} = F_{z-} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta \hat{F}_z}{F_{z-}} \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\alpha^2 + \beta^2|} \right)^2}. \quad (38b)$$

$F_{z-, \min}$ ist der minimal mögliche Gleichanteil der Eigenrauschzahl. Er ist dann erreicht, wenn der

⁶ Es gelten entweder die oberen oder die unteren Vorzeichen.

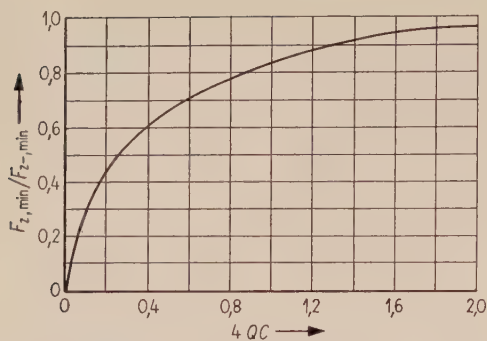


Bild 5. Das Verhältnis der minimalen Eigenrauschzahl zu ihrem minimal möglichen Gleichanteil.

Wechselanteil zu Null wird. Die Größen F_{z-} und $\Delta\hat{F}_z$ sind die in Bild 2 eingetragenen Meßgrößen.

In Bild 5 ist das Verhältnis $F_{z,min}/F_{z,min}$ für eine verlustfreie Wendelleitung als Funktion von $4QC$ dargestellt.

Für das Verhältnis der maximalen zur minimalen Eigenrauschzahl findet man bei optimaler Transformation die Beziehung

$$\frac{F_{z,max}}{F_{z,min}} = \frac{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 + |\alpha^2 + \beta^2|^2}{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - |\alpha^2 + \beta^2|^2}. \quad (39)$$

Es ist in Bild 6 für eine verlustfreie Wendelleitung als Funktion von $4QC$ aufgetragen.

Der Theorie der Wanderfeldröhre [8] entstammt

$$\sqrt{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - |\alpha^2 + \beta^2|^2} = \frac{1}{\sqrt{4QC}}. \quad (40)$$

Durch Einsetzen von Gl. (13a), (13b) und (40) in Gl. (31) findet man endlich für die theoretisch minimale Eigenrauschzahl einer rauscharmen Wanderfeldröhre mit verlustloser Verzögerungsleitung den Ausdruck

$$F_{z,min} = I^2 \sqrt{4 - \pi} \frac{T_k}{T_0}. \quad (41)$$

Bei einer Kathodentemperatur von $T_k = 1000^\circ\text{K}$ und einer Raumtemperatur von $T_0 = 290^\circ\text{K}$ erhält man für $I^2 = 1$ mit Gl. (41) eine Mindesteigenrauschzahl von $F_{z,min} = 3,2$.

Der in Gl. (41) angegebene Wert kann, wie schon erwähnt, nur bei Einhaltung der Bedingungen (28) und (29b) erreicht werden.

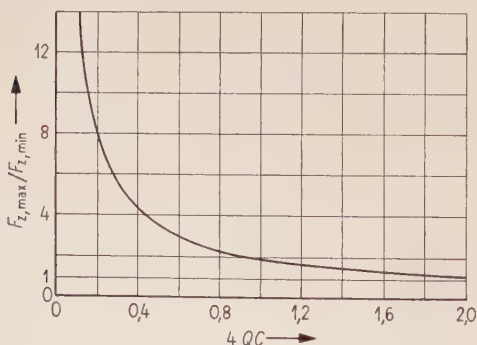


Bild 6. Das Verhältnis der maximalen zur minimalen Eigenrauschzahl bei optimaler Transformation.

5. Experimentelle Ergebnisse

Zum Abschluß sollen noch die im Abschnitt 4 theoretisch gefundenen Rauschgrößen mit den an einer Versuchsröhre gemessenen Werten verglichen werden. Der prinzipielle Aufbau der Röhre ist in Bild 3 dargestellt. Die Messungen wurden bei der Frequenz $f = 3\text{ GHz}$ durchgeführt. Die Kathodentemperatur der Versuchsröhre betrug $T_k = 1000^\circ\text{K}$, so daß mit Gl. (41) unter Annahme von $I^2 = 1$ theoretisch eine minimale Eigenrauschzahl von $F_{z,min} = 3,2$ erwartet werden mußte.

Da sich alle für die theoretische Berechnung interessierenden Daten auf den $4QC$ -Parameter zurückführen lassen, wollen wir uns auf die Angabe derjenigen Größen beschränken, die zu seiner Bestimmung benötigt werden. Es sind die reduzierte Plasmawellenlänge $\lambda_q = 18\text{ cm}$, der Verstärkungsparameter $C = 2,7 \cdot 10^{-2}$ und die Gleichgeschwindigkeit der Elektronen im Bereich der Verzögerungsleitung $v_- = 1,2 \cdot 10^9\text{ cm/s}$.

Diese drei Größen wurden gemessen und daraus der Parameter

$$4QC = 0,66$$

bei der Signalfrequenz $f = 3\text{ GHz}$ berechnet.

Um den Vergleich der theoretisch gefundenen (a) und der an der Versuchsröhre gemessenen Werte (b) zu erleichtern, sind diese in der Tabelle I einander gegenübergestellt. Es besteht gute Übereinstimmung zwischen den theoretisch und den meßtechnisch erhaltenen Größen.

Tabelle I. Vergleich der theoretischen und gemessenen Rauschgrößen einer rauscharmen Wanderfeldröhre.

	$F_{z,min}$	$F_{z,max}$	$\frac{F_{z,max}}{F_{z,min}}$	F_{z-}	$\Delta\hat{F}_z$	$\frac{4QC}{(2kT_0\Delta f)^2} \tilde{U}_1^2 \tilde{I}_1^2$
a	3,2	9,0	2,82	6,1	2,9	6,75
b	3,1	8,2	2,65	5,65	2,55	6,28

Dem Leiter des Instituts für Hochfrequenztechnik an der Technischen Hochschule Aachen, Herrn Prof. Dr.-Ing. H. DÖRING, möchte ich für die Betreuung der Arbeit und für die wertvollen Hinweise, die er mir während der Ausarbeitung gegeben hat, meinen besonderen Dank aussprechen.

Bezeichnungen

A, B, C, D	Elemente der Vierpolmatrizen (siehe z. B. Gl. (5)),
e	Elementarladung,
m	Elektronenruhemasse,
Δf	Bandbreite,
k	Boltzmannsche Konstante,
T_0	Raumtemperatur in $^\circ\text{K}$ ($T_0 = 290^\circ\text{K}$),
T_k	Kathodentemperatur in $^\circ\text{K}$,
$V \sim = U \sim e^{i\theta}$	Wechselspannung des Leitungsanalogons für den Elektronenstrahl,
$J \sim = I \sim e^{i\theta}$	Wechselstrom des Leitungsanalogons für den Elektronenstrahl,

$U \sim = \frac{m}{e} v \sim$	kinetische Wechsellspannung,
$I \sim$	Wechselanteil des Konvektionsstromes,
U_-	Gleichspannung,
I_-	Gleichanteil des Konvektionsstromes,
$v \sim$	Wechselkomponente der Elektronengeschwindigkeit,
v_-	Gleichkomponente der Elektronengeschwindigkeit,
$\theta = \int_{z_1}^z \beta_e dz$	statischer Laufwinkel der Elektronen,
$\beta_e = \omega/v_-$	Phasenkonstante der Elektronen,
ω	Kreisfrequenz,
z	Ausbreitungsordinate der Elektronen,
$Z = 2p \frac{U_-}{I_-} \frac{\omega_p}{\omega}$	charakteristischer Strahlwiderstand,
$\omega_p = \sqrt{\frac{e}{m} \frac{Q}{\epsilon_0}}$	Plasmakreisfrequenz,
p	Plasmareduktionsfaktor,
Q	Raumladungsdichte,
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante des Vakuums,
λ_p	Plasmawellenlänge,
λ_q	reduzierte Plasmawellenlänge.

Schrifttum

- [1] PETER, R. W., Low-noise traveling-wave amplifier. RCA Rev. **13** [1952], 344–368.
- [2] BLOOM, S. und PETER, R. W., A minimum noise figure of the traveling-wave tube. RCA Rev. **15** [1954], 252–267.
- [3] NICLAS, K.-B. und HECHTEL, R., Ein rauscharmer Wanderfeldröhrenverstärker für das 4000-MHz-Gebiet. Telefunken-Röhre, H. 36 [1959], 75–98.
- [4] BLOOM, S. und PETER, R. W., Transmission line analog of a modulated electron beam. RCA Rev. **15** [1954], 95–112.
- [5] HAHN, W. C., Small signal theory of velocity-modulated electron beams. General Electric Rev. **42** [1939], 258–270.
- [6] RAMO, S., The electron wave theory of velocity modulated tubes. Proc. Inst. Radio Engrs. **27** [1939], 757–763.
- [7] WATKINS, D. A., Traveling-wave tube noise figure. Proc. Inst. Radio Engrs. **40** [1952], 65–70.
- [8] PIERCE, J. R., Traveling-wave tubes. D. van Nostrand Co., New York 1950.
- [9] TIEN, P. K. und MOSHMAN, J., Monte Carlo calculation of noise near the potential minimum of a high frequency diode. J. appl. Phys. **27** [1956], 1067–1078.
- [10] LÖCHERER, K.-H., Rauschen von Raumladungsdioden im Laufzeitgebiet bei Berücksichtigung der Maxwellischen Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen. A.E.Ü. **12** [1958], 225–236, 265–270.
- [11] SCHOTTKY, W., Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern. Ann. Phys. **57** [1918], 541–567.
- [12] RACK, A. J., Effect of space-charge and transit time on the shot noise in diodes. Bell Syst. tech. J. **17** [1938], 592–619.
- [13] SIEGMAN, A. E. und WATKINS, D. A., Potential minimum noise in the microwave diode. Transact. Inst. Radio Engrs. ED-4 [1957], 82–86.

PERSÖNLICHES

Hans Erich Hollmann †

Erst vor kurzer Zeit erreichte mich die erschütternde Nachricht, daß am 19. November 1960 Professor Dr.-Ing. E.h., Dr.-Ing. HANS ERICH HOLLMANN, 61 Jahre alt, in Los Angeles in Kalifornien an den Folgen eines Herzleidens gestorben ist. Mit seiner Frau und seinen Kindern trauert eine große Anzahl von Fachkollegen und Freunden um den Verstorbenen, der aus der Fülle seines Schaffens jäh vom Tod herausgerissen worden ist.

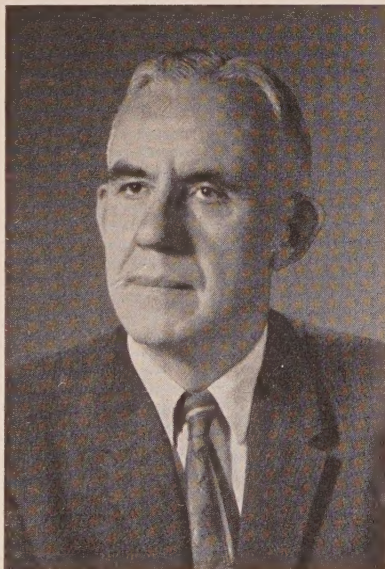
HANS ERICH HOLLMANN wurde am 4. November 1899 als Sohn des Sanitätsrates Dr. P. HOLLMANN in Solingen geboren*. Er war eine jener seltenen Begabungen, denen sich von Jugend auf die Wahl des künftigen Berufes von selbst ergibt. Durch das Verständnis seines Elternhauses gefördert, experimentierte er schon als Schüler des humanistischen Gymnasiums seiner Heimatstadt auf dem Gebiet der damals aufkommenden Funktechnik und besaß neben einer kompletten Röntgenanlage alle möglichen Funk- und Hochfrequenzgeräte.

Nachdem er am Ende des ersten Weltkrieges noch in französische Kriegsgefangenschaft geraten war, begann er nach seiner Rückkehr im Jahre 1920 das Studium der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Hier fand er nach kurzer Zeit das Arbeitsgebiet, dem er fast ausschließlich seine ganze Lebensarbeit gewidmet hat, die ultrakurzen Wellen und die Mikrowellen. Im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Darmstadt baute er damals die ersten Ultrakurzwelligensender und -empfänger und erreichte mittels eines Rückkoppelsenders Wellenlängen von einem Meter. Die Doktorarbeit, mit der er 1928 zum Dr.-Ing. promovierte, be-

handelte in grundlegender Weise den „Mechanismus der Barkhausenschen Elektronenschwingungen“. HOLLMANN überbrückte die damalige Zeit der Arbeitslosigkeit mit Hilfe eines Stipendiums der „Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft“. In dieser Zeit befaßte er sich mit Forschungsarbeiten, die ihn noch bis zum Jahre 1930 in Darmstadt verweilen ließen.

Danach, Anfang 1930, ging HOLLMANN an das kurz vorher gegründete „Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung“ nach Berlin, wo er sich auf Anregung des damaligen Institutsdirektors, Prof. Dr. K. W. WAGNER, neben seinem Spezialgebiet, den ultrakurzen Wellen und Mikrowellen, vor allem der Elektroakustik und Oszillographentechnik zuwendete. Hierbei ist eine besonders originelle Anlage zur Lotung der Heaviside-Schicht hervorzuheben, die HOLLMANN für die deutsche Expedition zum Internationalen Polarjahr 1932/34 entwickelte; diese Expedition nach Tromsø in Norwegen erbrachte schon damals wertvolle Beiträge über die Zusammenhänge zwischen den Polarlichtern, den erdmagnetischen Störungen und der Ausbreitung der elektrischen Wellen. In das Jahr 1932 fällt auch die HOLLMANNsche Entdeckung der dynamischen Laufzeiteffekte erster und zweiter Art in der Braunschen Röhre, und von dieser Entdeckung stieß HOLLMANN dann später auf die Laufzeitoszillographie.

Die Firma Lorenz baute damals für ihn die ersten Modelle einer wirksamen Bremsfeldtriode, und die Firma Telefunken brachte die Röhre RS 296 heraus, die ein hochbelastbares Gitter und einen Hartglaskolben hatte. Die Berliner Funkausstellung 1932 zeigte die HOLLMANNschen Bremsfeldsender und -empfänger mit Zwischenmodulation und Richtantenne, die damals so großes Aufsehen erregten, daß im



* Siehe auch H. FRÜHAUF, H. E. Hollmann zum 60. Geburtstag. Hochfrequenztechnik und Elektroakustik **68** [1959], 141–143.

Anschluß an die Funkausstellung Versuche über die Ausbreitung dieser Kurzwellen auf dem Wannsee bei Berlin stattfanden; damit begann für HOLLMANN eine langjährige Zusammenarbeit mit der Firma Telefunken als wissenschaftlicher Mitarbeiter. In das Jahr 1933 fällt auch die Habilitation HOLLMANNs an der Technischen Hochschule Berlin mit der Arbeit „Die ultradynamische Schwingungsanfachung durch Rückkopplung“, die auch der Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin vorgelegt wurde. Über diese Arbeit und die HOLLMANNschen Forschungen berichtete K. W. WAGNER im September 1934 auf der Hauptversammlung der „Internationalen Funkwissenschaftlichen Union“ (U.R.S.I.) in London unter dem Thema „Die Erzeugung von elektrischen Wellen unterhalb von 1 m Länge“.

In den Jahren 1933 bis 1936 arbeitete HOLLMANN als wissenschaftlicher Berater bei der von ihm mitbegründeten Firma Gema (Gesellschaft für elektroakustische und mechanische Apparate m.b.H.) in Berlin-Köpenick. In diesen Jahren der Sammlung war aber sein Hauptanliegen, alle Erkenntnisse auf dem Gebiet der ultrakurzen Wellen zusammenzufassen; diese Arbeit fand ihren Niederschlag in dem der Zeit weit vorausseilenden zweibändigen Buch „Physik und Technik der ultrakurzen Wellen“. Nur ein Beispiel dafür: Im zweiten Band deutet HOLLMANN nach kurzer Behandlung der Funkmeßtechnik in dem Kapitel „Sehen mit elektrischen Wellen“ auf das kommende Radar hin. Leider fiel diese Anregung nicht auf fruchtbaren Boden, und es ist zu bedauern, daß in den Darstellungen über die Geschichte der Radartechnik nirgendwo auf diese ersten Schritte in Deutschland hingewiesen wird.

Vom wissenschaftlichen Gesichtspunkt aus sind die Jahre 1936 bis 1945 besonders fruchtbare Jahre für HOLLMANN gewesen. Im Jahre 1936 gründete er sein privates „Laboratorium für Hochfrequenztechnik und Elektromedizin“, das in den ersten Jahren eine vollkommen unabhängige Forschungsstätte war. Als wissenschaftlicher Mitarbeiter habe ich selbst fast 7 Jahre mit HOLLMANN dort zusammengearbeitet und weiß, wie anregend und vielseitig sein Denken war, wie sein stets wacher Geist mit neuen tragenden Ideen die Arbeit beflügelte und mit welcher Freude alle Mitarbeiter dieses Laboratoriums an den gestellten Aufgaben teilnahmen. Denn die Zusammenarbeit mit ihm war überaus harmonisch, er ließ bei länger dauernden Untersuchungen den Mitarbeitern genügend Zeit, damit die gewonnenen Erkenntnisse ausreifen konnten. In diesen Jahren sind an die 100 wissenschaftliche Abhandlungen aus diesem privaten Forschungsinstitut hervorgegangen. Mit seinem Bruder, Prof. Dr. W. HOLLMANN, entwickelte er damals neue Registrierungsmethoden in der Elektrokardiographie, die heute als Pioniererfolge ersten Ranges gewertet werden.

Im Jahre 1942 erfolgte HOLLMANNs Ernennung zum wissenschaftlichen Leiter der neuen, damals gerade gegründeten „Forschungsgesellschaft für Funk- und Tonfilmtechnik“; in dieser Eigenschaft hatte er zahlreiche Laboratorien und Forschungsstätten zu betreuen, und durch sein tatkräftiges Verhalten gelang es ihm, vielen Forschern der von Deutschland besetzten Länder über die schwere Zeit hinwegzuhelfen.

Kurz vor dem Ende des Krieges siedelte HOLLMANN — sein Wohnhaus und Laboratorium waren inzwischen durch Bomben zerstört worden — von Berlin nach Thüringen über, wo er Probleme der Laufzeitoszillographie, Elektronenballistik, Strahlungstherapie, dielektrischen und Induktionserhitzung mit Funkensendern und Impulsen, kapazitiven Wechselstromgeneratoren, elektromagnetischen und elektrostatischen Schwebeaufhängungen von mehrdimensionalen Systemen, automatischen Scharfabstimmung von Sendern und Empfängern u. a. mehr bearbeitete.

Nach dem Kriege erfolgte HOLLMANNs Ernennung zum a.o. Professor an der Universität Jena; er ging von hier, als die Besatzungsmacht in Thüringen wechselte, nach den U.S.A., wo er in Kalifornien mit seiner Familie eine neue Heimat fand. Sein Hauptforschungsgebiet war hier in den ersten Jahren der Transistor, wie man aus seinen in dieser Zeit erfolgten Veröffentlichungen sieht. In den letzten Jahren seines Lebens war HOLLMANN Leiter des Forschungslaboratoriums eines großen amerikanischen Konzerns der Ölbranche, der „Dresser-Industries“.

HOLLMANNs Verdienste um die Elektrotechnik, besonders um die Hochfrequenztechnik und Elektromedizin, sind sehr groß und wurden in seiner Heimat nicht so gewürdigt, wie es ihnen gebührt hätte. Nach dem Kriege, im Jahre 1952, wurde HOLLMANN vom „Institute of Radio Engineers“ mit dem Grad eines Fellow geehrt, als Auszeichnung für seine hervorragenden Leistungen auf dem Gebiet der Hochfrequenztechnik. Er gehörte zu den Herausgebern der Zeitschrift „Hochfrequenztechnik und Elektroakustik“, und die Technische Hochschule Dresden verlieh ihm vor wenigen Jahren die Würde eines Dr.-Ing. E.h.

Mit HANS ERICH HOLLMANN ist ein bedeutender Forscher dahingegangen, der ein gütiger und wahrhafter Mensch war. Wem es vergönnt war, lange Jahre hindurch freundschaftlich mit ihm zusammenzuarbeiten, der fühlte die Begeisterungsfähigkeit dieses Mannes, der mit der ganzen Wärme seines Herzens für alles Neue in der Wissenschaft seine Mitarbeiter fortriß, der aber über die enge Fachwissenschaft hinaus in seinem Eintreten für alles Gute und Schöne sich bei allen, die ihn näher kannten, ein Denkmal der Anerkennung und Verehrung gesetzt hat.

A. THOMA

Berichtigung

G. Doetsch, Die Matrix eines Kettenleiters aus gleichen Vierpolen (A.E.U. 14 [1960], Heft 8, 335—340).

In Gl. (14) ist $2 \left(\frac{A+D}{2} \right)^2 - 1$ durch $2 \left(\frac{A+D}{2} \right)^2 - 2$ und in Gl. (16) $2A^2 - 1$ durch $2A^2 - 2$ zu ersetzen.

Mitarbeiter dieses Heftes:

Dr. E. Henze, i. H. Telefunken GmbH., Ulm (Donau), Söflinger Straße 100; Prof. Dr. H. Kaden, i. H. Siemens & Halske AG, Zentral-Laboratorium, München 25, Hofmannstraße 51; Dr. K.-H. Löcherer, i. H. Telefunken GmbH., Röhrenentwicklung, Ulm (Donau), Söflinger Straße 100; Ing. R. Maurer, i. H. Telefunken GmbH., Röhrenentwicklung, Ulm (Donau), Söflinger Straße 100; Dr. K.-B. Niclas, i. H. Telefunken GmbH., Röhrenentwicklung, Ulm (Donau), Söflinger Straße 100; Dipl.-Phys. A. Schief, Institut für Schwingungsforschung, Tübingen, Stauffenbergstraße 21; Dipl.-Ing. H. Schreiber, i. H. Felten & Guilleaume Fernmeldeanlagen GmbH., Nürnberg, Äußere Bayreuther Straße; Dr. W. Schüssler, Institut für Elektrische Nachrichtentechnik der T. H., Aachen, Templergraben 55; Dr. E. Schwartz, Rogowski-Institut für Elektrotechnik der T. H., Aachen, Templergraben 55.

Alle Rechte, auch die der photomechanischen Wiedergabe, sind vorbehalten, jedoch wird gewerblichen Unternehmen die Anfertigung einer photomechanischen Vervielfältigung (Photokopie, Mikrokopie) von Beiträgen oder Beitragsteilen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens gegen Bezahlung der dort vorgesehenen Gebühren an die Inkassostelle für Photokopiergebühren beim Börsenverein des Deutschen Buchhandels, Frankfurt am Main, gestattet. Werden die Gebühren durch Wertmarken der Inkassostelle entrichtet, so ist für jedes Photokopierblatt eine Marke im Betrag von —,30 DM zu verwenden.

VOM WESEN DER NACHRICHT

VON PROF. DR. G. MEGLA

204 Seiten mit 69 Bildern,

6 Tafeln und zahlr. Tabellen. Ganzleinen DM 24,—

1. Kapitel. Die Nachricht

1.1 Vorbetrachtung — 1.2 Die Symbole der Nachricht —
1.2.1 Die Symbolarten — 1.2.2 Die Empfangsbereit-
schaft — 1.3 Die unbewußte Nachrichtenübertragung —
1.4 Die bewußte Nachrichtenübertragung — 1.5 Der
Weg einer Nachricht — 1.6 Die transportfähige Nach-
richt mit langer Übertragungszeit — 1.7 Die transport-
fähige Nachricht mit kurzer Übertragungszeit

2. Kapitel. Die Nachrichtenverbindungen

2.1 Die Träger der Nachrichtensymbole — 2.1.1 Das
Signal als Träger des Symbols — 2.1.2 Mechanische
Träger — 2.1.3 Der elektrische Strom als Symbolträ-
ger — 2.1.4 Die akustische Trägerschwingung — 2.1.5
Die elektromagnetische Trägerschwingung — 2.2 Die
Teilstrecken einer Verbindung — 2.3 Optische und
akustische Verbindungen — 2.4 Interplanetarische Ver-
bindungen

3. Kapitel. Die elektrische Nachrichtenübertragung

3.1 Verfahren der elektrischen Nachrichtenübertra-
gung — 3.2 Der Informationsgehalt der elektrischen
Nachrichtenübertragung — 3.3 Neue Anwendungs-
gebiete

4. Kapitel. Die unmittelbare Nachrichtenübertragung

4.1 Vorbetrachtung — 4.2 Die nachrichtentechnischen
Eigenschaften der Sinnesorgane — 4.3 Sinnesorgane
und Nachrichtenverbindungen der Tiere — 4.4 Die
Nachrichtenübertragung im Nervensystem

Literaturverzeichnis — Sachwortverzeichnis

Es ist das erste Buch, das Sinn und Wesen der Nachrichten-
übertragung in einer umfassenden Gesamtschau darstellt.
Die schnelle Entwicklung der Technik verleitet dazu, die
großen Zusammenhänge aus dem Auge zu verlieren, deren
Kenntnis es erleichtern wird, den richtigen Weg voran-
zugehen und die gegebenen Möglichkeiten sinnvoll anzu-
wenden. Bedenkt man, daß das menschliche Gehirn rund
10 Milliarden Schaltelemente in Form von Nervenzellen
besitzt, die modernen elektronischen Rechenmaschinen da-
gegen nur mehrere zehntausend Schaltelemente, so wird
man der Nachrichtentechnik noch große Entwicklungs-
möglichkeiten zuerkennen.

Die modernen Nachrichtensysteme nehmen nicht nur Wahr-
nehmungen auf, sondern sie konzentrieren, speichern, ver-
arbeiten sie; darüber hinaus lösen sie auch ohne mensch-
liche Hilfe logische, automatisch überwachte Handlungen
aus.

Hier werden die bekannten Arten der Übertragung im
Hinblick auf ihren Mechanismus untersucht, um die Über-
tragungseigenschaften und Qualität der Verfahren ver-
gleichen und daraus Anregungen für die Fortentwicklung
schöpfen zu können.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

RICHARD FELDTKELLER

THEORIE

DER SPULEN UND ÜBERTRAGER

3., neubearbeitete Auflage

VIII, 187 Seiten mit 143 Bildern, Ganzleinen DM 24,—

Spulen und Übertrager mit Kernen aus hochpermeablen
Bleichen und hochpermeablen Ferriten spielen in der
Nachrichtentechnik eine sehr bedeutende Rolle. Spulen
finden wir in Schwingungskreisen, Siebschaltungen,
Dämpfungsentzerrern und Laufzeitentzerrern. Über-
trager finden wir an sehr vielen Stellen der Übertrags-
wege zur Anpassung, zur Potentialtrennung.

Dieses Buch soll den Ingenieur der Nachrichtentechnik
mit denjenigen Eigenschaften von Spulen und Über-
tragern bekannt machen, die er braucht, um ihre Bau-
daten aus den ihm gestellten Anforderungen vorauszu-
berechnen.

Der Abschnitt A skizziert die komplexe Permeabilität
der *hochpermeablen Kerne*, ihre Komponenten und deren
Zusammenhang mit dem Reihen-Ersatzschaltbild, den
Kehrwert der komplexen Permeabilität, dessen Kompo-
nenten und deren Zusammenhang mit dem Parallel-
Ersatzschaltbild. Ohne auf die Herleitung im einzelnen
einzugehen, wird dann der Einfluß der Wirbelströme,
der Hysterese und der Nachwirkung auf diese Größen
beschrieben. Wirbelstrombeiwert, Hysteresebeiwert und
Nachwirkungsbeiwert werden neben der Anfangsper-
meabilität als wichtigste Kennzeichen der hochperme-
ablen Werkstoffe eingeführt. Darauf wird das Zusammen-
wirken von Kern und Luftspalt erörtert.

In Abschnitt B werden die gebräuchlichsten Formen
der *Spulen mit hochpermeablen Kernen* aufgeführt.
Praktische Diagramme zur Berechnung des Gleich-
stromwiderstandes der Wicklung und ihrer Induktivität
werden entwickelt. Die verschiedenen Komponenten
des Verlustfaktors, in denen sich Gleichstromwiderstand
der Wicklung und Wirbelströme, Hysterese und Nach-
wirkung des Kernes zeigen, werden in Formeln darge-
stellt. Es wird gezeigt, wie man die Größe der Wick-
lungskapazität abschätzen kann.

Der Abschnitt C behandelt den *Frequenzgang der Über-
trager*, und zwar zuerst der Anpassungsübertrager, die
zwischen zwei ohmschen Widerständen eingeschaltet
werden, dann den der Resonanzübertrager für schmale
und für breite Frequenzbänder, die in den Gitterkreisen
von Verstärkerröhren liegen.

Den Schluß des Buches bilden Hinweise auf die Be-
messung der Transformatoren und der Glättungsrosseln
der Netzgeräte.

S. HIRZEL VERLAG · STUTTGART

